JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **137**, 394–465 (1996)
ARTICLE NO. 0052

Une représentation unipotente associée à l'orbite minimale: Le cas de $so(4, 3)$

HERVÉ SABOURIN

URA C.N.R.S. 1322, "Groupes de Lie et géométrie," Département de Mathématiques, Université de Poitiers, 40, avenue du recteur Pineau, F-86022 Poitiers cedex, France

Received January 30, 1995

D. Vogan, dans [VO 4], a établi l'existence d'un élément π du dual unitaire du revêtement universel de $SO_0(4, 3)$ dont l'annulateur infinitésimal est l'idéal de Joseph de $so(4, 3)$. Ce travail propose, tout d'abord, une autre méthode permettant de retrouver ce résultat et s'inspirant essentiellement d'une paramétrisation du dual unitaire d'un groupe presque algébrique réel due à M. Duflo ([DU 1]). On donne, ensuite, une réalisation explicite de π dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, on détermine ses paramètres de Langlands, puis on s'intéresse, enfin, à sa restriction à G_2. © 1996 Academic Press, Inc.

D. Vogan, in [VO 4], has proved the existence of an element π of the unitary dual of the universal covering of $SO_0(4, 3)$ of which the annihilator is the Joseph ideal. In this work, we present a new method for obtaining this result, which essentially uses a parametrization of the unitary dual of a real almost semialgebraic group, given by M. Duflo ([DU 1]). Then, we give an explicit realization of π in $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, we find the Langlands's parameters and, at last, we study its restriction to G_2. © 1996 Academic Press, Inc.

0. INTRODUCTION

La philosophie des orbites coadjointes, introduite par Kirillov dans le cadre des groupes nilpotents, suggère que l'on s'intéresse plus généralement aux liens qui pourraient exister entre le dual unitaire $\hat{G}$ d'un groupe de Lie réel G et l'ensemble des G-orbites coadjointes dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En d'autres termes, le problème consiste à essayer d'associer à chaque G-orbite une représentation unitaire irréductible de G. Lorsque G est semi-simple, cette question reste délicate si l'orbite est nilpotente.

De façon générale, une élément π de $\hat{G}$ sera dit associé à la G-orbite nilpotente O s'il est défini de la manière suivante. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est identifiée à $\mathfrak{g}^*$, via la forme de Killing, $U(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$ sont, respectivement, l'algèbre enveloppante et l'algèbre symétrique de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$. D'après

0022-1236/96 $18.00

A. Joseph [JO 1], on sait qu'il existe au moins un idéal primitif J de $U(\mathfrak{g})$ tel que la variété des zéros $V(J)$ de J dans $\mathfrak{g}$ soit égale à la fermeture de Zariski de O. La représentation π sera associée à O si l'annulateur infinitésimal $J(\pi)$ de π dans $U(\mathfrak{g})$ est égal à J.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ n'est ni de type A_n, ni de type C_n, et désignons, dans ce cas, par $O_{\min}$ l'unique orbite nilpotente de dimension minimale. Suivant [JO 2], on sait qu'il existe un et un seul idéal primitif J_0 de $U(\mathfrak{g})$, complètement premier et même maximal, tel que: $V(J_0) = \overline{O_{\min}}$. La question est de savoir alors si, lorsque G est réel simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un élément π de $\hat{G}$ associé à $O_{\min}$. D. Vogan, dans ([VO 4]), répond à cette question d'existence lorsque G est le revêtement universel de la composante neutre de $SO(4, 3)$.

L'objet de ce travail est de justifier également de l'existence d'une telle représentation pour ce revêtement, en utilisant d'autres méthodes que celles de D. Vogan, et d'en proposer une réalisation explicite. La stratégie utilisée peut se résumer ainsi:

- Désignons par B un sous-groupe de Borel de G, Δ^+ un système de racines positives associé à B, β la plus haute racine dans Δ^+ et $X_{-\beta}$ un vecteur radiciel associé à $-\beta$. Soit P un sous-groupe parabolique standard de G, $\mathfrak{p}$ son algèbre de Lie et $pr^*\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{p}^*$ la projection canonique correspondante. On montre, dans un premier temps, que la projection $pr^*(O_{\min})$ contient une P-orbite isomorphe à l'unique P-orbite dense de $O_{\min}$. Soit $\lambda_{\mathfrak{p}}$ l'image par pr^* de $X_{-\beta}$. Suivant la terminologie de M. Duflo, ([DU 1]), on établit également que λ_p est une forme de type unipotent.

- L'orbite $O_{\min}$ est G-admissible et ne possède qu'un seul paramètre d'admissibilité, lequel en induit un pour la P-orbite dense. La méthode des orbites de Duflo, décrite dans [DU 1], peut alors s'appliquer à la P-orbite $\lambda_{\mathfrak{p}}$ et on construit ainsi, pour chaque sous-groupe parabolique standard P, une représentation unitaire irréductible de P, notée $\pi_{\mathfrak{p}}$, associée à $O_{\min}$.

- On constate enfin que G est un groupe de rang supérieur ou égal à 3; d'après un résultat de J. Tits ([SE]), on montre que G s'identifie à la somme amalgamée de ses sous-groupes paraboliques maximaux standards, suivant leurs intersections. Il suffira, alors, de considérer les représentations $\pi_{\mathfrak{p}}$ définies précédemment, pour chaque sous-groupe parabolique maximal standard de G, de vérifier ensuite que deux telles représentations coïncident sur les intersections pour en déduire l'existence de π.

En fait, l'existence d'opérateurs unitaires convenablement choisis permet de réaliser chaque représentation $\pi_{\mathfrak{p}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, et d'obtenir ainsi, dans cet espace, des formules explicites de π pour un système de générateurs de G.

Il nous reste à prouver que la représentation π répond bien au problème posé, c'est-à-dire que l'idéal annulateur $J(\pi)$ est l'idéal de Joseph de $\mathfrak{g}$. Le travail de D. Garfinkle, ([GA]), et les formules obtenues pour π nous permettent d'obtenir explicitement un système de générateurs de J_0, puis de vérifier l'inclusion $J_0 \subset J(\pi)$. On utilise, enfin, la maximalité de J_0.

Nous déterminons ensuite les paramètres de Langlands de π. Ce travail repose, tout d'abord, sur la détermination des K-types de la représentation. La notion de variété associée et les travaux de D. Vogan ([VO 2]) qui s'y rapportent ainsi que le caractère "admissible" de la représentation rendent possible cette détermination. L'obtention du K-type minimal et la connaissance du caractère infinitésimal permettent, alors, de trouver les paramètres de Langlands de π, à l'aide de ([VO 1]). On montre, en fait, que π est équivalent au quotient irréductible d'une série principale.

Nous terminons, enfin, en étudiant la restriction, π_{G_2}, de π à G_2, sous-groupe de G dont l'algèbre de Lie est de type G_2. En appliquant une fois de plus la méthode des orbites au cas de la G_2-orbite nilpotente de dimension 8, O_8, on montre que π_{G_2} est irréductible et on retrouve, ainsi, la G_2-représentation unipotente associée à O_8 introduite par D. Vogan ([VO 4]). Cependant, la situation s'avère différente lorsqu'il s'agit d'étudier la restriction de cette représentation aux paraboliques maximaux standards. Pour l'un d'entre eux en effet, soit Q_2, d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}_2$, cette restriction se décompose en somme de deux représentations irréductibles. En fait, dans ce cas, la Q_2-orbite dense de O_8 est un revêtement d'ordre 2 de la Q_2-orbite correspondante dans $\mathfrak{q}_2^*$, la projection canonique fournissant alors les deux paramètres d'admissibilité qui expliquent la décomposition de cette représentation et illustrent bien encore la cohérence de la méthode des orbites de Duflo.

1. La méthode des orbites de M. Duflo

Le point crucial, permettant de mener à bien cette construction, est l'existence d'une paramétrisation du dual unitaire d'un groupe presque algébrique réel due à M. Duflo et décrite dans [DU 1]. Cette paramétrisation s'inspire, en fait, de la méthode des orbites en supposant toutefois connu le dual unitaire d'un groupe réductif quelconque. Rappelons-en tout d'abord les termes essentiels.

1.1. *Formes linéaires de type unipotent*

On considère, dans ce paragraphe, un groupe presque algébrique réel G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}$, et B un sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$, on notera ${}^uB$ le radical unipotent de B, et ${}^u\mathfrak{b}$ son algèbre de Lie. Rappelons par ailleurs que B admet, en général,

des sous-groupes réductifs maximaux, que deux tels sous-groupes sont conjugués par un élément de ${}^uB$. Soit R un tel sous-groupe, son algèbre de Lie, appelée facteur réductif de $\mathfrak{b}$. Alors, B se décompose en produit semi-direct de R et ${}^uB$.
Si f est un élément de $\mathfrak{g}^*$, on notera B_f la forme bilinéaire définie sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \qquad B_f(X, Y) = f([X, Y]).$$

Définition 1.1.1. Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à f si l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f est contenu dans $\mathfrak{b}$. S'il y a égalité, $\mathfrak{b}$ est une polarisation.

On désignera, respectivement, par $\mathfrak{g}(f)$ et $G(f)$ les stabilisateurs de f dans $\mathfrak{g}$ et G, et pour $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, coisotrope relativement à f, d'orthogonal $\mathfrak{b}^\perp$ dans $\mathfrak{g}^*$, on considèrera l'ensemble $w(f)$ des f' dans $f + \mathfrak{b}^\perp$ telles que $\dim \mathfrak{g}(f')$ soit minimum lorsque f' parcourt $f + \mathfrak{b}^\perp$. On dira que $\mathfrak{b}$ vérifie *la condition de Pukansky* si $w(f) = f + \mathfrak{b}^\perp$.

Définition 1.1.2. La sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b}$ est dite de type unipotent relativement à f si elle est algébrique, si elle vérifie la condition de Pukansky, et s'il existe un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ qui stabilise la restriction de f à ${}^u\mathfrak{b}$.

Définition 1.1.3. Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est dite de type fortement unipotent relativement à f si $\mathfrak{b}$ est algébrique, coisotrope relativement à f et si, de plus, on *a*: $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(f) + {}^u\mathfrak{b}$.

Définition 1.1.4. Un élément f de $\mathfrak{g}^*$ est dit de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(1) il existe un facteur réductif de $\mathfrak{g}(f)$ contenu dans $\ker f$.

(2) il existe une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, de type fortement unipotent relativement à f.

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est unipotente, tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type unipotent; si, par contre, $\mathfrak{g}$ est réductive, 0 est l'unique forme de type unipotent.

Lemme 1.1.1 [DU 1, Ch. 1]. *Toute sous-algèbre de type fortement unipotent est de type unipotent. Réciproquement, si f est de type unipotent, toute sous-algèbre de type unipotent est de type fortement unipotent.*

Définition 1.1.5. Soit f une forme de type unipotent de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de type fortement unipotent relativement à f. On dit que $\mathfrak{b}$ est acceptable si la dimension de ses facteurs réductifs est maximale (lorsque $\mathfrak{b}$ parcourt l'ensemble des sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à f).

En fait, M. Duflo construit dans ([DU 1]), par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre acceptable relativement à la forme de type unipotent f, qui, de plus, est invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$ stabilisant f, et, donc, en particulier, par $G(f)$. Cette construction est canonique, de sorte que l'on appellera cette sous-algèbre la sous-algèbre acceptable canonique.

1.2. *Groupe métaplectique et représentation métaplectique*

• Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2d$, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée B. Soit $Sp(V)$ le groupe symplectique correspondant et $Mp(V)$ le groupe métaplectique, revêtement connexe à deux feuillets de $Sp(V)$, dont nous utiliserons la réalisation suivante.

Notons $L(V)$ l'ensemble des Lagrangiens de V et $LO(V)$ l'ensemble des Lagrangiens orientés. Suivant les notations de ([LI-VE], par. 1.7.), on désignera par $\varepsilon(L, L')$ l'orientation relative des éléments L et L' de $LO(V)$. Posons alors: $s(L, L') = i^{d-\dim(L \cap L')} \cdot \varepsilon(L, L')$.

Soit x un élément de $Sp(V)$; on associe à x une fonction, notée $s(x)$, définie sur $LO(V)$, à valeurs dans les racines quatrièmes de 1, en posant: $\forall L \in LO(V)$, $s(x)(L) = s(L, xL)$. La fonction $s(x)$ ne dépend pas de l'orientation choisie sur L. Il existe, alors, deux fonctions $\phi(x)$, définies sur $L(V)$ et vérifiant: (τ est l'indice de Maslov dans $L(V)$)

$$\phi(x)^2 = s(x)^{-1}$$

et

$$\forall L, L' \in L(V), \qquad \phi(x)(L') = \phi(x)(L)\, e^{i(\pi/4)(\tau(L', L, xL) - \tau(L', L, x^{-1}L'))} \tag{1}$$

Soit $Mp(V) = \{(x, \phi(x)),\ x \in Sp(V)\}$, muni de la loi de groupe suivante:

$$\forall x, x' \in Sp(V), \qquad (x, \phi(x)) \cdot (x', \phi(x')) = (xx', \phi(x) * \phi(x')),$$

où $\forall L \in L(V)$, $\phi(x) * \phi(x')(L) = \phi(x)(L) \cdot \phi(x')(L) \cdot e^{i(\pi/4)\,\tau(L, xL, xx'L)}$.

Avec ces notations, l'élément non trivial du noyau de la projection de $Mp(V)$ sur $Sp(V)$ s'écrit $(1, -1)$. Nous noterons ε cet élément.

• En fait, la formule (1) permet de donner une autre réalisation de $Mp(V)$, utile pour la suite, et qui dépend de la donnée d'un Lagrangien L_o

de V, fixé une fois pour toutes. On définit le groupe $S_o(V) = Sp(V) \times \mathbb{T}$, muni de la loi suivante:

$$(x, t) \cdot (x', t') = (xx', tt' e^{i(\pi/4)\, \tau(L_o,\, x \cdot L_o,\, xx' \cdot L_o)}) \qquad (2)$$

Soit maintenant $M_o(V)$ le sous-groupe de $S_o(V)$ formé des couples $(x, t(x))$, $x \in Sp(V)$ où $t(x)$ est une racine carrée de $s(x)(L_o)^{-1}$. On vérifie aisément, à l'aide de (1), que $M_o(V)$, muni de la loi induite par (2), est un groupe isomorphe à $Mp(V)$.

Certains résultats de Lion–Vergne ([LI-VE]) permettent, alors, de décrire un sous-groupe compact maximal de $M_o(V)$. Choisissons, pour cela, une base $(e_1, e_d, f_1, ..., f_d)$ de V, telle que: $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, et telle que $e_1, ..., e_d$ soit une base de L_o. On peut alors identifier V à $\mathbb{C}^d$ de sorte que $e_1, ..., e_d$ soit la base canonique de $\mathbb{C}^d$ et $f_k = ie_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$. Alors, si $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}^d$, on peut écrire: $B = \mathrm{Im}\langle\ ,\ \rangle$.

Dans ces conditions, le groupe unitaire $U(d)$ s'identifie à un sous-groupe compact maximal de $Sp(V)$. Soit $\widetilde{U(d)}$ le revêtement simplement connexe de $U(d)$ défini par:

$$\widetilde{U(d)} = \{(k, \varphi) \in U(d) \times \mathbb{R} / \det k = e^{i\varphi}\}$$

Soit également $RU(d)$ le revêtement à deux feuillets de $U(d)$ donné par:

$$RU(d) = \{(k, z) \in U(d) \times \mathbb{T} / z^2 = \det k\}$$

L'application: $(k, \varphi) \to (k, e^{i(\varphi/2)})$ est, alors, un morphisme de revêtement de $\widetilde{U(d)}$ sur $RU(d)$. Soit (k, φ) un élément de $\widetilde{U(d)}$, *et* $\theta_1, ..., \theta_d$ des réels tels que:

$$e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_d} \text{ sont les valeurs propres de } k,\ \theta_1 + \cdots + \theta_d = \varphi.$$

Posons:

$$\mu(\theta) = 2n, \qquad \text{si} \quad \theta = n\pi, \qquad \mu(\theta) = 2n+1, \qquad \text{si} \quad n\pi < \theta < (n+1)\,\pi.$$

$$\alpha(k, \varphi) = \sum_{j=1}^{j=d} \mu\left(\frac{\theta_j}{2}\right) \qquad \text{et} \quad \mu(k, \varphi) = \alpha(k \cdot \bar{k}^{-1}, 2\varphi).$$

G. Lion et M. Vergne montrent que si k est élément de $U(d)$, $e^{-i(\pi/4)\,\mu(k,\,\varphi)}$ est une racine carrée de $s(k)(L_o)^{-1}$, et montrent, également, la proposition suivante:

Proposition 1.21 [LI-VE, Cor. 1.9.16]. *L'application* $(k, \varphi) \to (k, e^{-i(\pi/4)\,\mu(k,\,\varphi)})$ *est un morphisme localement injectif de* $\widetilde{U(d)}$ *dans* $M_o(V)$, *qui induit un plongement de $RU(d)$ dans $M_o(V)$ permettant ainsi d'identifier $RU(d)$ à un sous-groupe compact maximal de $M_o(V)$.*

• Plus généralement, soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire alternée B, de noyau $V^{\perp}$. Soit H un groupe opérant linéairement dans V, en préservant B. Alors, B induit, sur $V/V^{\perp}$, une structure symplectique H-invariante. Il existe un homomorphisme de groupes de H dans $Sp(V/V^{\perp})$. Pour x élément de H, nous noterons $\bar{x}$ l'image de x dans $Sp(V/V^{\perp})$ par cet homomorphisme. Soit $I(V)$ l'ensemble des sous-espaces isotropes maximaux de V; notons que si L est élément de $I(V)$, alors $L/V^{\perp}$ est un Lagrangien de $V/V^{\perp}$.

Soit $x \in H$ et $(\bar{x}, \bar{\phi}(x))$ un élément de $Mp(V/V^{\perp})$. Posons: $\phi(x)(L) = \bar{\phi}(\bar{x})(L/V^{\perp})$.

Soit, enfin: $H^V = \{(x, \phi(x)),\ x \in H,\ (\bar{x}, \bar{\phi}(x)) \in Mp(V/V^{\perp})\}$, muni de la structure de groupe induite par celle de $Mp(V/V^{\perp})$. C'est un revêtement à deux feuillets de H, appelé extension métaplectique de H, relativement à V.

Remarque. On pourra définir, comme précédemment et à l'aide du lagrangien $L_o/V^{\perp}$ de $V|V^{\perp}$, le groupe $H^{V,o}$ formé des couples $(x, t(x))$, $x \in H$, qui est isomorphe à l'extension H^V.

• Les notations restent les mêmes que précédemment. Soit W un sous-espace de V, H-invariant. On suppose que: $W^{\perp} \subset W + V^{\perp}$. Dans ce cas, si L est élément de $I(W)$, $L + V^{\perp}$ est un élément de $I(V)$. Les groupes H^V et H^W sont bien définis. Soit x un élément de H, $(x, \phi(x))$ (*resp.* $(x, \varphi(x))$), un représentant de x dans H^V (resp. H^W). D'après [DU 1], 2.8, on sait que le nombre $\phi(x)(L + V^{\perp})/\varphi(x)(L)$ ne dépend pas du choix de L dans $I(W)$. On notera, dorénavant, $\phi(x)/\varphi(x)$ ce nombre. On a, d'autre part, le résultat suivant:

LEMME 1.2.1. *Soit τ une représentation de H^V, telle que $\tau(\varepsilon) = -Id$. Pour $(x, \varphi(x))$ élément de H^W, on pose*:

$$\tilde{\tau}(x, \varphi(x)) = (\phi(x)/\varphi(x))\ \tau(x, \phi(x)). \tag{3}$$

Alors, (3) *ne dépend pas du choix de la fonction $\phi(x)$, et définit une représentation de l'extension H^W.*

• Soit U un groupe algébrique unipotent réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Soit μ un élément de $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{l}$ une polarisation de $\mathfrak{u}$ relativement à μ, L le sous-groupe de U, d'algèbre de Lie l et $t_{\mu,\mathfrak{l}}$ le caractère unitaire de L associé à μ. Soit, enfin, $T_{\mu,\mathfrak{l}}$ l'élément du dual unitaire de U associé à μ par la correspondance de Kirillov et $\mathfrak{H}(\mathfrak{l})$ un espace de réalisation de cette représentation. On sait que la classe d'équivalence de $T_{\mu,\mathfrak{l}}$ ne dépend pas de la polarisation $\mathfrak{l}$ choisie. Soit T_μ cette classe.

Soit, maintenant $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ deux polarisations relativement à μ. D'après Lion–Perrin, ([LI-PE]), il existe un opérateur d'entrelacement canonique de $\mathfrak{H}(\mathfrak{l})$ sur $\mathfrak{H}(\mathfrak{l}')$, défini par:

$$\forall \alpha \in \mathfrak{H}(\mathfrak{l}), \qquad \forall x \in U, \qquad F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}(\alpha)(x) = \int_{L'/L \cap L'} \alpha(xy)\, t_{\mu,\mathfrak{l}}(y)\, dy$$

(dy, mesure invariante choisie sur $L'/L \cap L'$ de telle façon que cet opérateur soit unitaire).

Soit H un groupe opérant, par automorphismes, dans $\mathfrak{u}$, et donc dans U, via l'application exponentielle. Supposons, de plus, que H stabilise μ. Pour x dans H, on note $A(x)$ l'opérateur de $\mathfrak{H}(\mathfrak{l})$ sur $\mathfrak{H}(x \cdot \mathfrak{l})$ défini par:

$$\forall \alpha \in \mathfrak{H}(\mathfrak{l}), \qquad \forall y \in U, \qquad A(x) \cdot \alpha(y) = \alpha(x^{-1}(y)).$$

Posons: $S_{\mu,\mathfrak{l}}(x) = \|A(x)\|^{-1} \cdot F_{\mathfrak{l},x\cdot\mathfrak{l}} \circ A(x)$. On obtient ainsi un opérateur unitaire et $S_{\mu,\mathfrak{l}}$ est une représentation projective de H dans $\mathfrak{H}(\mathfrak{l})$.

L'espace $\mathfrak{u}$ est muni de la forme bilinéaire B_μ, de sorte que l'extension métaplectique $H^{\mathfrak{u}}$ est bien définie. Soit $\mathfrak{H}$ une réalisation de référence de T_μ. Si $\mathfrak{l}$ est une polarisation de $\mathfrak{u}$, et P: $\mathfrak{H}(\mathfrak{l}) \to \mathfrak{H}$ un opérateur d'entrelacement, on note encore: $S_{\mu,\mathfrak{l}}(x) = PS_{\mu,\mathfrak{l}}(x) \cdot P^{-1}$, $x \in H$, de sorte que $S_{\mu,\mathfrak{l}}$ est une représentation projective de H dans $\mathfrak{H}$.

Lemme 1.2.2 [LI-PE]. *Soit* $(x, \phi(x))$ *un élément de* $H^{\mathfrak{u}}$. *L'opérateur* $\phi(x)(\mathfrak{l}) \cdot S_{\mu,\mathfrak{l}}(x)$ *ne dépend pas du choix de la polarisation* $\mathfrak{l}$. *Posons*: $S_\mu(x) = \phi(x)(\mathfrak{l}) \cdot S_{\mu,\mathfrak{l}}(x)$.

Alors, S_μ *est une représentation de* $H^{\mathfrak{u}}$, *appelèe représentation métaplectique*, *et on a*:

$$\forall (x, \phi(x)) \in H^{\mathfrak{u}}, \qquad \forall y \in U, \quad S_\mu(x, \phi(x))\, T_\mu(y)\, S_\mu(x, \phi(x))^{-1} = T_\mu(x(y)).$$

1.3. *La méthode des orbites de Duflo*

- *Une paramétrisation du dual unitaire*. On reprend les notations de 1.1 et on considère un élément f de $\mathfrak{g}^*$. Soit $R(f)$ un facteur réductif de $G(f)$. Alors, l'extension métaplectique $G(f)^{\mathfrak{g}}$ est produit semi-direct de $R(f)^{\mathfrak{g}}$ et ${}^{u}G(f)$ (identifié, ici, de manière unique, à un sous-groupe de $G(f)^{\mathfrak{g}}$).

Soit, maintemant, $Y(f)$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles τ de $R(f)^{\mathfrak{g}}$ telles que $\tau(\varepsilon) = -\mathrm{Id}$. Soit, enfin, $\mathbb{E} = \{(f, \tau)/f$ est de type unipotent et $\tau \in Y(f)\}$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathbb{E}$. M. Duflo établit, alors, dans [DU 1], ch. 3, le résultat suivant:

Théorème 1.3.1. *Il existe une bijection de* $\mathbb{E}/G$ *sur le dual unitaire de* G.

Désignons par $\pi_{f,\tau}$ l'image par cette bijection d'un couple (f,τ) de $\mathbb{E}$. Outre la technique de récurrence qui permet de démontrer ce théorème, M. Duflo propose une autre construction de cette représentation qui utilise, notamment, l'existence d'une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à f. C'est cette construction, décrite dans ([DU 1], 3.16), que nous utiliserons par la suite et, donc, que nous allons rappeler maintenant.

• *Une construction de* $\pi_{f,\tau}$. Soit (f,τ) un élément de $\mathbb{E}$. On sait, d'après le paragraphe 1.1, qu'il existe des sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à f, $G(f)$-invariantes; choisissons-en une, soit $\mathfrak{b}$. Soit $r(f)$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}(f)$. On a $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(f)+{}^u\mathfrak{b}=r(f)\oplus{}^u\mathfrak{b}$. Posons ${}^u\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, A le sous-groupe de G correspondant, et $R(f)$ un facteur réductif de $G(f)$, d'algèbre de Lie $r(f)$.

Soit $B=G(f)\,A=R(f)\times A$, qui est un sous-groupe fermé de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Soit μ la restriction de f à $\mathfrak{a}$. Alors, $R(f)$ opère dans $\mathfrak{a}$ en laissant stable μ, de sorte que l'extension $R(f)^{\mathfrak{a}}$ est bien définie. On vérifie facilement que $\mathfrak{a}^{\perp}\subset\mathfrak{a}+\mathfrak{g}(f)$, si bien que l'on peut introduire l'élément $\tilde{\tau}$ de $\widehat{R(f)^{\mathfrak{a}}}$ associé à τ, selon le lemme 1.2.1.

Soit T_μ la classe de représentation de A associée à μ par la correspondance de Kirillov, d'espace $\mathfrak{L}_\mu$, et S_μ la représentation métaplectique associée.

On définit une représentation du groupe B, notée $\tau\otimes S_\mu T_\mu$, dans le produit tensoriel de l'espace de τ et de l'espace de T_μ, soit $V_\tau\otimes\mathfrak{L}_\mu$, en posant:

$$\forall x\in R(f),\qquad \forall y\in A,\qquad (\tau\otimes S_\mu T_\mu)(xy)=\tilde{\tau}(x,\varphi(x))\otimes S_\mu(x,\varphi(x))\cdot T_\mu(y) \tag{4}$$

Posons: $\pi_{f,\tau,\mathfrak{b}}=\operatorname{Ind}_B^G(\tau\otimes S_\mu T_\mu)$.

Désignons par $\mathfrak{H}$ l'espace de cette représentation et décrivons cet espace. Soit δ la fonction module de G relativement à B, $\mathfrak{C}$ l'espace des fonctions f, continues sur G, à support compact modulo B, et à valeurs dans l'espace de Hilbert $V_\tau\otimes\mathfrak{L}_\mu$ vérifiant: $\forall x\in G$, $\forall b\in B$, $f(xb)=\delta(b)\,f(x)$.

On définit sur $\mathfrak{C}$ une forme linéaire positive G-invariante m, unique à un coefficient multiplicatif près, et on pose:

$$m(f)=\int_{G/B} f(x)\,dm(x),\qquad \forall f\in\mathfrak{C}$$

On définit ensuite l'espace $\mathfrak{H}_\infty$ des fonctions f, C^∞ sur G, qui vérifient:

– $\forall x\in G$, $\forall b\in B$, $f(xb)=\delta(b)^{1/2}\,(\tau\otimes S_\mu T_\mu)(b)^{-1}\cdot f(x)$
– $\int_{G/B}\|f(x)\|^2\,dm(x)<\infty$, où $\|\ \|$ désigne la norme dans $V_\tau\otimes\mathfrak{L}_\mu$

On définit, sur $\mathfrak{H}_\infty$, un produit scalaire, noté $\langle\ \rangle$, par: $\langle f, g\rangle = \int_{G/B} \langle f(x), g(x)\rangle_1\, dm(x)$, où $\langle\ \rangle_1$ est le produit scalaire dans $V_\tau \otimes \mathfrak{L}_\mu$. Alors, $\mathfrak{H}$ est le complété de l'espace préhilbertien $\mathfrak{H}^\infty$ pour ce produit scalaire, et G opère dans $\mathfrak{H}$ par: $\forall x, y \in G$, $\forall f \in \mathfrak{H}$, $\pi_{f, \tau, \mathfrak{b}}(x) \cdot f(y) = f(x^{-1}y)$.

THÉORÈME 1.3.2 [DU 1, 3.16]. *Soit* $(f, \tau) \in \mathbb{E}$, $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{b}'$ *deux sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à* f, $G(f)$*-invariantes. Les représentations* $\pi_{f, \tau, \mathfrak{b}}$ *et* $\pi_{f, \tau, \mathfrak{b}'}$, *définies par la construction précédente, sont irréductibles et équivalentes.*

La classe d'équivalence de ces représentations est la classe de la représentation $\pi_{f, \tau}$.

• *Le cas d'une orbite admissible.* Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$ et considérons le sous-ensemble $X(f)$ de $Y(f)$ formé des éléments τ de $Y(f)$ dont la différentielle est un multiple de $if_{|r(\mathfrak{f})}$.

DÉFINITION 1.3.1. La G-orbite $G \cdot f$ est dite G-admissible si $X(f)$ est différent du vide. Chaque élément de $X(f)$ sera, alors, appelé paramètre d'admissibilité de la G-orbite.

Le lemme qui suit est conséquence directe des définitions.

LEMME 1.3.1. *Soit* f *un élément de* $\mathfrak{g}^*$ *et* $G(f)_o$ *la composante neutre de* $G(f)$.

(1) *L'orbite* $G \cdot f$ *est* G*-admissible si et seulement si il existe un caractère unitaire* χ_f *de* $(G(f)_o)^{\mathfrak{g}}$ *tel que* $d\chi_f = if_{|\mathfrak{g}(f)}$ *et* $\chi_f(\varepsilon) = -1$. *De plus, si un tel caractère existe, il est unique.*

(2) *On suppose que* $G \cdot f$ *est* G*-admissible et que* $G(f)$ *est connexe. Alors,* $X(f)$ *est un singleton.*

(3) *On suppose que* $if_{|\mathfrak{g}(f)}$ *est la différentielle d'un caractère de* $G(f)_o$. *Alors,* $G \cdot f$ *est* G*-admissible si et seulement si* $(G(f)_o)^{\mathfrak{g}}$ *possède exactement deux composantes connexes.*

La stratégie que nous allons utiliser par la suite nécessite que l'on puisse associer à une orbite G-admissible un élément du dual unitaire du groupe G. La paramétrisation de M. Duflo nous en fournit les outils nécessaires, à condition que l'orbite G-admissible envisagée possède un élément de type unipotent.

DÉFINITION 1.3.2. Supposons f G-admissible et de type unipotent; soit τ un paramètre d'admissibilité de f, et $\pi_{f, \tau}$ la représentation unitaire irréductible de G, construite dans le paragraphe précédent. Cette représentation sera appelée G-représentation unipotente associée à la G-orbite $G \cdot f$.

2. Un théorème d'existence

2.1. *Notations*

On suppose, dans ce paragraphe, que G est un groupe de Lie simple réel déployé, connexe et simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'est ni de type A_n, ni de type C_n, $\mathcal{K}$ la forme de Killing qui identifie $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on désignera par $\mathfrak{g}'^*$ son dual. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, θ l'involution correspondante, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{s}$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ un système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, Δ^+ un système de racines positives choisi dans Δ, Π une base de racines simples de Δ. A toute racine positive α de Δ, on associe le sl_2-triplet $(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha})$ d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$. Soit β la plus haute racine de Δ, $\mathfrak{n}^+ = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta^+ \rangle$, $\mathfrak{n} = \langle X_{-\alpha}, \alpha \in \Delta^+ \rangle$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ la sous-algèbre de Borel associée. Soit enfin K un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}$ suivant la représentation adjointe, et donc sur $\mathfrak{g}^*$ par identification. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{N}/G$ l'ensemble des G-orbites nilpotentes.

Dans ces conditions, on sait que l'ensemble $\mathfrak{N}/G$ possède un unique élément de dimension minimale, que nous noterons $O_{\min}$, que cette orbite est la G-orbite dans $\mathfrak{g}$ du vecteur radiciel $X_{-\beta}$. Soit $f = \mathcal{K}(X_{-\beta}, \cdot)$ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ associé à $X_{-\beta}$.

2.2. *Orbite minimale et formes de type unipotent*

Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique standard (c'est-à-dire contenant $\mathfrak{b}$) de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, sa décomposition de Langlands. Compte tenu des choix faits précédemment, on a: $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}^+$. Soit P le sous-groupe parabolique de G correspondant et q la restriction de f à $\mathfrak{p}$. Soit, enfin, r^* l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{p}^*$.

Proposition 2.2.1. (1) *La P-orbite $P \cdot X_{-\beta}$ est ouverte dense, contenue dans $O_{\min}$. C'est, de plus, l'unique P-orbite de $\mathfrak{g}$, vérifiant ces propriétés.*

(2) *L'application de restriction r^* induit un isomorphisme de $P \cdot X_{-\beta}$ sur $P \cdot q$.*

Preuve. (1) Soit $\mathfrak{g}(X_{-\beta})$ le stabilisateur de $X_{-\beta}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}(X_{-\beta}) = \mathfrak{g}(X_{-\beta}) \cap \mathfrak{p}$, $G(X_{-\beta})$ et $P(X_{-\beta})$ les stabilisateurs respectifs dans G et P. Par propriété de β, on a: $N^- \subset G(X_{-\beta})$; Si $\Omega = P \cdot N^-$ est la grosse cellule de Bruhat de G associée à P, on en déduit, alors, que $\Omega \cdot X_{-\beta} = P \cdot X_{-\beta}$ est un ouvert dense de $G \cdot X_{-\beta}$. L'unicité d'une telle P-orbite est une conséquence directe des propriétés de Ω.

(2) L'inclusion $\mathfrak{p}(X_{-\beta}) \subset \mathfrak{p}(q)$ est due à la $\mathfrak{g}$-invariance de $\mathscr{K}$. Montrons que l'on a l'égalité.

La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-$ et le fait que $\mathfrak{n}^-$ est inclus dans $\mathfrak{g}(X_{-\beta})$ impliquent l'existence d'un isomorphisme $j\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{-\beta}) \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}(X_{-\beta})$. Cet isomorphisme permet de munir l'espace $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(X_{-\beta})$ d'une structure symplectique, la forme bilinéaire $\overline{B_f}$ qui définit cette structure étant donnée par: $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}(X_{-\beta})$, $\bar{B}_f(\bar{X}, \bar{Y}) = f([X, Y])$. Soit $s\colon \mathfrak{p}/\mathfrak{p}(X_{-\beta}) \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ le morphisme surjectif induit par l'application identité de $\mathfrak{p}$. D'autre part, $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ est muni également d'une structure symplectique, de forme bilinéaire associée $\bar{B}_q$.

Soit $\bar{Z} \in \ker s$; on a, pour tout X de $\mathfrak{p}$: $\bar{B}_q(s(\bar{X}), s(\bar{Z})) = 0 = q([X, Z]) = f([X, Z]) = \bar{B}_f(\bar{X}, \bar{Z})$. On déduit que $\bar{Z} \in \ker \overline{B_f}$, d'où $\bar{Z} = \bar{0}$ et $\mathfrak{p}(X_{-\beta}) = \mathfrak{p}(\mathrm{q})$.

Intéressons-nous maintenant aux stabilisateurs dans P. L'inclusion $P(X_{-\beta}) \subset P(q)$ est, comme précédemment, une conséquence directe des définitions. Considérons, alors, les stabilisateurs, $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$ et $P(\mathbb{R}q)$, des droites vectorielles engendrées respectivement par $X_{-\beta}$ et q. Soit x un élément de $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$, X un élément de $\mathfrak{p}$. On a: $\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta} = a(x)\, X_{-\beta}$, a caractère de $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$, et $\operatorname{Ad} x \cdot q(X) = q(\operatorname{Ad} x^{-1} \cdot X) = \mathscr{K}(X_{-\beta}, \operatorname{Ad} x^{-1} \cdot X) = \mathscr{K}(\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta}, X) = a(x)\, q(x)$. D'où l'inclusion: $P(\mathbb{R}X_{-\beta}) \subset P(\mathbb{R}q)$. Montrons que l'on a, fait, l'égalité, ce qui revient à établir que $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$ et $P(\mathbb{R}q)$ ont un facteur réductif commun.

Soit H le sous-groupe de Cartan de G, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On vérifie facilement que $H \subset P(\mathbb{R}X_{-\beta})$. L'inclusion $P(\mathbb{R}X_{-\beta}) \subset P(\mathbb{R}q)$ implique l'existence d'un facteur réductif R_β de $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$, d'un facteur réductif R_q de $P(\mathbb{R}q)$, et d'un facteur réductif R de P tels que: $R_\beta \subset R_q \subset R$. Mais MA est un facteur réductif de P et, d'après [KH-TO], prop. 22, il existe x dans le centralisateur de H dans ${}^uP$ tel que $xRx^{-1} = MA$. Ce centralisateur étant réduit à 1, on $R = MA$ et tout revient, alors, à montrer que: $MA(\mathbb{R}X_{-\beta}) = MA(\mathbb{R}q)$.

L'inclusion: $MA(\mathbb{R}X_{-\beta}) \subset MA(\mathbb{R}q)$ est due à ce qui précède. Réciproquement, soit $x \in MA(\mathbb{R}q)$, b le caractère de $MA(\mathbb{R}q)$ tel que $\operatorname{Ad} x \cdot q = b(x)\, q$, et $X \in \mathfrak{g}$, $X = Y + Z$, $Y \in \mathfrak{p}$, $Z \in \mathfrak{n}^-$. Alors, $\operatorname{Ad} x \cdot X = \operatorname{Ad} x \cdot Y + \operatorname{Ad} x \cdot Z$, avec $\operatorname{Ad} x \cdot Y \in \mathfrak{p}$ et $\operatorname{Ad} x \cdot Z \in \mathfrak{n}^-$, car MA normalise $\mathfrak{n}^-$.

Mais $\mathscr{K}(\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta}, X) = \mathscr{K}(X_{-\beta}, \operatorname{Ad} x^{-1} \cdot Y)$, car pour tout élément U de $\mathfrak{n}^-$, on a: $\mathscr{K}(X_{-\beta}, U) = 0$.

D'où:

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}(\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta}, X) &= \operatorname{Ad} x \cdot q(Y) \\
&= b(x)\, q(Y) \\
&= b(x)\, \mathscr{K}(X_{-\beta}, X), \qquad \text{car } \mathscr{K}(X_{-\beta}, Z) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a: $\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta} = b(x)\, X_{-\beta}$ et donc $x \in MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$. Finalement, on a bien:

$$P(\mathbb{R}q) = P(\mathbb{R}X_{-\beta})$$

Montrons, enfin, l'égalité des stabilisateurs $P(q)$ et $P(X_{-\beta})$. Soit $x \in P(q)$; alors, x est élément de $P(\mathbb{R}q)$ et donc de $P(\mathbb{R}X_{-\beta})$. On a: $\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta} = a(x)\, X_{-\beta}$.

D'où: $\mathscr{K}(\operatorname{Ad} x \cdot X_{-\beta}, X) = a(x)\, \mathscr{K}(X_{-\beta}, X)$, $\forall X \in \mathfrak{p}$, et $\operatorname{Ad} x \cdot q = a(x) q = q$. Ainsi, x appartient à $P(X_{-\beta})$. L'égalité des stabilisateurs implique immédiatement 2).

Proposition 2.2.2. *Soit* $\mathfrak{b}_q = \mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}$. *La forme q est de type unipotent dans $\mathfrak{p}^*$ et la sous-algèbre acceptable canonique associée à q est $\mathfrak{b}_q$.*

La démonstration de ce résultat utilise essentiellement une technique de récurrence due à M. Duflo. Soit μ la restriction de q à $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}(\mu)$ et v la restriction de q à $\mathfrak{l}$.

Lemme 2.2.1. *On a*: $\mathfrak{l}(v) = \mathfrak{l}$.

Preuve. Compte tenu de [DU 1], ch. 1, Lemme 16, tout revient à démontrer que: $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}(\mu)$. L'inclusion $\mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}(\mu) \subset \mathfrak{l}$ est évidente.

Soit Π' le sous-ensemble de Π qui sert à définir la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ et $\Delta(\Pi')$ le système de racines associé à la sous-algèbre réductive $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Si X appartient à $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, écrivons X sous la forme:

$$X = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha H_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+(\Pi')} b_\alpha X_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+(\Pi')} c_\alpha X_{-\alpha}$$

Pour $\alpha \in \Delta$, $X_{\alpha-\beta}$ sera choisi comme élément de la base de Chevalley si $\alpha - \beta$ est élément de Δ, et égal à 0 sinon.

Soit $A_{\mathfrak{m}} = \{\alpha - \beta,\ \alpha \in \Delta^+(\Pi') \cup \{0\} / X_{\alpha-\beta} \in [\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a},\ X_{-\beta}]\}$.

Ecrivons $-\beta$ sous la forme: $-\beta = \sum_{\alpha_i \in \Pi'} n_i \alpha_i$, les n_i étant des entiers $\leqslant -1$. Alors, tout élément δ de $A_{\mathfrak{m}}$ s'écrit: $\delta = \sum_{\alpha_i \in \Pi - \Pi'} n_i \alpha_i + \sum_{\alpha_i \in \Pi'} (n_i + s_i) \cdot \alpha_i$, s_i entiers $\geqslant 0$, et si X appartient à $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, on a:

$$[X, X_{-\beta}] = \sum d_\delta X_\delta, \qquad \text{avec} \quad \delta \in A_{\mathfrak{m}} \tag{5}$$

Posons, d'autre part: $A_{\mathfrak{n}} = \{\alpha - \beta, \alpha \in \Delta^+(\Pi) - \Delta(\Pi') / X_{\alpha-\beta} \in [\mathfrak{n}, X_{-\beta}]\}$. Par définition, tout élément δ de $A_{\mathfrak{n}}$ s'écrit: $\delta = \sum_{\alpha_i \in \Pi - \Pi'} n'_i \alpha_i + \sum_{\alpha_i \in \Pi'} n_i \alpha_i$ et $n'_i > n_i$, pour au moins un α_i dans $\Pi - \Pi'$. Il résulte facilement de tout ceci que:

$$A_{\mathfrak{m}} \cap A_{\mathfrak{n}} = \phi \tag{6}$$

Posons, enfin: $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}' + \mathfrak{n}''$, avec: $\mathfrak{n}' = \langle X_\alpha, \quad -\alpha \in A_n \rangle$ et $\mathfrak{n}'' = \langle X_\alpha, -\alpha \notin A_\mathfrak{n} \rangle$.

Soit, maintenant, L un élément quelconque de $\mathfrak{l}$, $L = X + Y$, $X \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{n}$. On a, alors:

$$\mathscr{K}([X, X_{-\beta}], Z) + \mathscr{K}([Y, X_{-\beta}], Z) = 0, \qquad \forall Z \in \mathfrak{n}. \tag{7}$$

De (5), (6), (7) on déduit facilement tout d'abord que $\mathscr{K}(X_{-\beta}, [Y, Z]) = 0$ pour tout Z de $\mathfrak{n}'$, puis, par définition même de $A_\mathfrak{n}$, que: $\mathscr{K}([Y, X_{-\beta}], Z) = 0$, pour tout Z de $\mathfrak{n}''$, ce qui implique que Y est élément de $\mathfrak{n}(\mu)$. (7) implique alors que X est élément de $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a})(\mu)$, d'où l'inclusion: $\mathfrak{l} \subset (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a})(\mu) + \mathfrak{n}(\mu)$.

Soit enfin $Z \in \mathfrak{p}$; écrivons Z sous la forme: $Z = Z' + Z''$, $Z' \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, $Z'' \in \mathfrak{n}$. Soit X un élément de $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a})(\mu)$. On a:

$$q([X, Z]) = \mathscr{K}(X_{-\beta}, [X, Z]) = \mathscr{K}(X_{-\beta}, [X, Z']) + \mathscr{K}(X_{-\beta}, [X, Z''])$$

Or, $[X, Z'] \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, $\beta \notin \Delta(\Pi')$ et $X \in (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a})(\mu)$. Donc,

$$\mathscr{K}(X_{-\beta}, [X, Z']) = \mathscr{K}(X_{-\beta}, [X, Z'']) = 0.$$

D'où $X \in p(q)$, $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a})(\mu) \subset \mathfrak{p}(q)$ et $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}(\mu)$, ce qui démontre le lemme.

Preuve de la Proposition 2.2.2. Il suffit d'appliquer le lemme 17, ch. 1, de [DU 1]. La sous-algèbre $\mathfrak{l}$ est, d'après le lemme 2.2.1, la sous-algèbre acceptable canonique relativement à v. On en déduit, ainsi, que la sous-algèbre $\mathfrak{b}_q = \mathfrak{l} + \mathfrak{n} = \mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}(\mu) + \mathfrak{n} = \mathfrak{p}(q) + \mathfrak{n}$ est la sous-algèbre acceptable canonique associée à q.

Il suffit, enfin, de remarquer que $X_\beta \notin \mathfrak{p}(X_{-\beta}) = \mathfrak{p}(q)$ et, donc, que $\mathfrak{p}(q) \subset \ker q$, pour en déduire que $\ker q$ contient bien un facteur réductif de $\mathfrak{p}(q)$ et, ainsi, que q est une forme de type unipotent.

Il sera utile, pour la suite, de savoir déterminer le stabilisateur $P(X_{-\beta})$, ou plus précisément, un sous-groupe compact maximal de $P(X_{-\beta})$.

PROPOSITION 2.2.3. *Le groupe $K \cap P(X_{-\beta})$ est un sous-groupe compact maximal de $P(X_{-\beta})$.*

Preuve. Il est clair que $K \cap P(X_{-\beta}) = K \cap MA(X_{-\beta})$. Tout revient donc à montrer que $K \cap MA(X_{-\beta})$ est un sous-groupe compact maximal de $MA(X_{-\beta})$. Or, on sait que $K \cap MA$ est un sous-groupe compact maximal de MA et que: $K \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta}) = (K \cap MA) \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$. Comme $-\beta$ est la plus basse racine de Δ, $MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$ contient un sous-groupe de Borel de MA: c'est donc un sous-groupe parabolique de MA. Il s'en suit que $K \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$ est un sous-groupe compact maximal de $MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$.

Tout élément x de $K \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$ vérifie la propriété: $\mathrm{Ad}\, x \cdot X_{-\beta} = a(x) \cdot X_{-\beta}$. Comme a est un caractère réel du groupe compact $K \cap MA$, alors $a(x) = \pm 1$.

Soit $MA^{-}(X_{-\beta}) = \{x \in MA / \mathrm{Ad}\, x \cdot X_{-\beta} = -X_{-\beta}\}$. On a, bien sûr:

$$K \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta}) = K \cap MA(X_{-\beta}) \cup K \cap MA^{-}(X_{-\beta}). \tag{8}$$

Soit B un sous-groupe compact de $MA(X_{-\beta})$ contenant $K \cap MA(X_{-\beta})$. C'est un sous-groupe compact de $MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$.

Il existe donc un élément z de $MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$ tel que $z \cdot B \cdot z^{-1} \subset K \cap MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$. Mais $MA(X_{-\beta})$ est un sous-groupe distingué de $MA(\mathbb{R}X_{-\beta})$, ce qui implique: $z \cdot B \cdot z^{-1} \subset MA(X_{-\beta})$. De (8), on déduit la double inclusion: $z \cdot K \cap MA(X_{-\beta}) \cdot z^{-1} \subset z \cdot B \cdot z^{-1} \subset K \cap MA(X_{-\beta})$. La fin de la preuve résulte alors du lemme simple suivant:

LEMME 2.2.2. *Soit H un groupe de Lie, et S un sous-groupe de H, ayant un nombre fini de composantes connexes, tel qu'il existe x dans H, $xSx^{-1} \subset S$. Alors, $xSx^{-1} = S$.*

2.3. *Orbite minimale et G-admissiblité*

On suppose dans ce paragraphe que $O_{\min}$ est G-admissible

PROPOSITION 2.3.1. *Soit P un sous-groupe parabolique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, $f = \mathscr{K}(X_{-\beta}, \cdot)$ et q la restriction de f à $\mathfrak{p}$.*

(1) *L'extension métaplectique $P(q)^{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à un sous-groupe de l'extension $G(f)^{\mathfrak{g}}$.*

(2) *La P-orbite dense associée à $O_{\min}$ est P-admissible, la restriction d'un paramètre d'admissibilité de $O_{\min}$ à $P(q)^{\mathfrak{p}}$ étant un paramètre d'admissibilité de cette P-orbite.*

Preuve. (1) L'égalité: $P(q) = P(X_{-\beta})$ et l'existence d'un isomorphisme j de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{-\beta})$ sur $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(X_{-\beta})$, établis dans la preuve de la proposition 2.2.1, permettent, d'une part, d'affirmer que $P(q)$ est un sous-groupe de $G(f)$, et, d'autre part, de montrer l'isomorphisme des deux structures symplectiques qui servent à définir les extensions en question. Le résultat s'en suit.

(2) Ce résultat est, en partie, une conséquence de (1); en effet, soit τ un paramètre d'admissibilité de $O_{\min}$ et $\tau_{\mathfrak{p}}$ la restriction de τ à $P(q)^{\mathfrak{p}}$, moyennant l'identification précédente. L'inclusion $\mathfrak{p}(q) \subset \mathfrak{g}(f)$ montre que $\tau_{\mathfrak{p}}$ remplit bien les conditions souhaitées. Le seul problème à résoudre est donc son irréductibilité. Or ceci tient au fait que chaque composante connexe du stabilisateur $G(X_{-\beta})$ possède au moins un point dans P.

Conséquence. Si $O_{\min}$ est admissible, la P-orbite $P \cdot X_{-\beta}$ est admissible et de type unipotent. On peut donc associer, à chaque couple (P, τ), P parabolique standard, τ paramètre d'admissibilité, et selon la méthode décrite précédemment, une P-représentation unipotente que nous noterons $\pi_{P,\tau}$. On dispose ainsi d'une famille de P-représentations unitaires irréductibles associée à l'orbite minimale. Le paragraphe qui suit va nous fournir un moyen de "remonter" au groupe G, à partir de certains éléments de cette famille.

2.4. *Un théorème d'existence*

- 2.4.1. *Sommes amalgamées, un résultat de J. Tits*

DÉFINITION 2.4.1. Soit (G_i) une famille de sous-groupes d'un groupe G. On dit que G est somme amalgamée des (G_i), suivant leurs intersections, s'il satisfait à la propriété universelle suivante, notée (PU):

Soit H un groupe, $h_i\colon G_i \to H$ une famille de morphismes telle que:

$$\forall (i, j), \qquad \forall x \in G_i \cap G_j, \qquad h_i(x) = h_j(x).$$

Alors, il existe un morphisme $h\colon G \to H$ et un seul tel que: $h(x) = h_i(x)$, $\forall x \in G_i$, pour tout i.

Le théorème suivant, établi par J. Tits, est démontré dans le cadre plus général des systèmes de Tits. Nous nous contenterons de cet énoncé plus restrictif, suffisant pour la suite.

THÉORÈME 2.4.1 [SE, ch. 2, par 1, cor. 3]. *Soit G un groupe de Lie réel simple de rang supérieur ou égal à 3, B un sous-groupe de Borel de G. Alors, G est somme amalgamée de ses sous-groupes paraboliques maximaux suivant leurs intersections.*

- 2.4.2. Supposons maintenant G de rang n, supérieur ou égal à 3. Désignons par $\{P_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ la famille des sous-groupes paraboliques maximaux standards de G, et supposons, de plus, que l'orbite minimale $O_{\min}$ est G-admissible.

Soit τ un paramètre d'admissibilité de $O_{\min}$. Pour chaque sous-groupe parabolique maximal P_i de G, on considère la P_i-représentation unipotente $\pi_{P_i,\tau}$ notée, dorénavant, $\pi_{i,\tau}$.

On suppose que la famille $(\pi_{i,\tau})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifie les deux hypothèses suivantes:

- (H_1): pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la restriction de $\pi_{i,\tau}$ à B est une représentation unitaire irréductible de B.

- (H_2): pour tout couple d'indices (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, les restrictions de $\pi_{i,\tau}$ et $\pi_{j,\tau}$ à $P_i \cap P_j$ sont équivalentes.

Désignons, enfin, par $\mathfrak{H}_i$ l'espace de la représentation $\pi_{i,\tau}$.

Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. La propriété (H_2) assure l'existence d'un opérateur unitaire U_i de $\mathfrak{H}_i$ sur $\mathfrak{H}_1$ qui entrelace les restrictions de $\pi_{i,\tau}$ et $\pi_{1,\tau}$ à $P_1 \cap P_i$. Posons, pour x dans P_i,

$$\underline{\pi}_{i,\tau}(x) = U_i \circ \pi_{i,\tau}(x) \circ U_i^{-1}$$

On définit, ainsi, une représentation de P_i dans l'espace $\mathfrak{H}_1$, équivalente à $\pi_{i,\tau}$.

Appliquons, maintenant, le théorème 2.4.1. Le groupe G est donc somme amalgamée des sous-groupes paraboliques maximaux P_i, suivant leurs intersections. Or, d'une part $\underline{\pi}_{i,\tau}$: $P_i \to U(\mathfrak{h}_1)$ est une famille de morphismes de groupes et, d'autre part, $\underline{\pi}_{i,\tau|P_1 \cap P_i} = \pi_{1,\tau|P_1 \cap P_i}$, $2 \leqslant i \leqslant n$.

Pour i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\underline{\pi}_{i,\tau|P_i \cap P_j}$ et $\underline{\pi}_{j,\tau|P_i \cap P_j}$ sont deux représentations équivalentes de $P_i \cap P_j$ dans l'espace $\mathfrak{H}_1$, d'après (H_2), irréductibles d'après (H_1).

Il existe donc $c \in U(\mathfrak{H}_1)$ tel que $c \circ \underline{\pi}_{i,\tau|P_i \cap P_j} = \underline{\pi}_{j,\pi|P_i \cap P_j} \circ c$. Il résulte de ceci et de ce qui précède que:

$$c \circ \pi_{1_{|B}} = \pi_{1_{|B}} \circ c.$$

D'après (H_1), on déduit immédiatement que $c = \lambda \cdot Id_{\mathfrak{h}_1}$et donc que: $\underline{\pi}_{i,\tau|P_i \cap P_j} = \underline{\pi}_{j,\tau|P_i \cap P_j}$.

Ainsi, on a: $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\underline{\pi}_{i,\tau|P_i \cap P_j} = \underline{\pi}_{j,\tau|P_i \cap P_j}$. Il existe, d'après la propriété (PU) de la définition 2.4.1, un morphisme π_τ: $G \to U(\mathfrak{H}_1)$ et un seul tel que:

$$\pi_\tau(x) = \pi_{i,\tau}(x), \qquad \forall x \in P_i.$$

Il nous reste à prouver que le morphisme π_τ est continu.

Soit P un sous-groupe parabolique maximal standard de G, de décomposition de Langlands $P = MAN$, avec $N \subset N^+$, et soit w un élément du groupe de Weyl de G qui transforme N en un sous-groupe de N^-. Soit $V = wPw^{-1}N$; on remarque immédiatement que V est un translaté de la "grosse cellule" de Bruhat, et donc qu'il s'agit d'un ouvert dense de G.

D'autre part, on considère les applications suivantes:

- d: $V \to P \times {}^uP$, définie par: $d(wxw^{-1} \cdot y) = (x, y)$
- e: $P \times {}^uP \to U(\mathfrak{H}_1) \times U(\mathfrak{H}_1)$, définie par: $e(x, y) = (\pi_{P,\tau}(x), \pi_{P,\tau}(y))$
- f: $U(\mathfrak{H}_1) \times U(\mathfrak{H}_1) \to U(\mathfrak{H}_1)$, définie par: $f(u, v) = \pi_\tau(w) \circ u \circ \pi_\tau(w)^{-1} \circ v$

ces trois applications sont clairement des applications continues, lorsque l'on munit $U(\mathfrak{H}_1)$ de la topologie de la convergence simple, de telle sorte que la composée $f \circ e \circ d$ est un application continue de V dans $U(\mathfrak{H}_1)$. Or cette composée n'est autre que la restriction de π_τ à un ouvert dense de G, ce qui démontre la continuité de π_τ.

On peut, maintenant, énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.4.2. *Soit G un groupe simple réel déployé, connexe et simplement connexe, de rang n supérieur ou égal à 3, B un sous-groupe de Borel de G et $O_{\min}$ la G-orbite nilpotente minimale. On suppose que $O_{\min}$ est G-admissible.*

Soit τ un paramètre d'admissibilité de $O_{\min}$, $\pi_{i,\tau}$ la P_i-représentation unipotente associée au couple (P_i, τ), pour chaque sous-groupe parabolique maximal standard P_i de G.

On suppose que la famille des représentations $(\pi_{i,\tau})$ satisfait aux deux hypothèses suivantes:

(1) *pour tout indice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la restriction de $\pi_{i,\tau}$ à B est une représentation unitaire irréductible de B.*

(2) *pour tout couple d'indices (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, les restrictions de $\pi_{i,\tau}$ et $\pi_{j,\tau}$ à $P_i \cap P_j$ sont équivalentes.*

Alors, il existe une représentation unitaire irréductible π_τ de G, et une seule, à équivalence près, dont la restriction à chaque parabolique maximal P_i est égale à $\pi_{i,\tau}$.

3. UNE REPRÉSENTATION UNIPOTENTE DE G ASSOCIÉE A L'ORBITE NILPOTENTE MINIMALE

3.1. *Le revêtement universel de $SO_o(4, 3)$*

3.1.1. *L'algèbre de Lie so(4.3.).* Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(4, 3)$ que nous identifierons à une sous-algèbre de $so(4, 4)$ de la manière suivante:

Soit $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_{-1}, e_{-2}, e_{-3}, e_{-4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$, $\mathscr{B}$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^8$, de matrice, par rapport à la base canonique, donnée par:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I_4 \text{ matrice unité } (4, 4).$$

On pose: $\varepsilon_i = e_i + e_{-i}$, $\varepsilon_{i+4} = e_i - e_{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. La famille (ε_i) est une base de $\mathbb{R}^8$, orthogonale relativement à $\mathscr{B}$.

Alors, $\mathfrak{g} = \{X \in so(4, 4)/X \cdot \varepsilon_8 = 0\}$, et un élément X de $\mathfrak{g}$ est représenté par sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^8$, soit:

$$X = \begin{bmatrix} A & a & B & a \\ {}^t b & 0 & -{}^t a & 0 \\ C & -b & -{}^t A & -b \\ {}^t b & 0 & -{}^t a & 0 \end{bmatrix}, \qquad A \in M_3(\mathbb{R}), \qquad a, b \in M_{3,1}(\mathbb{R}),$$

$$B, C \in M_3(\mathbb{R}), \text{ anti-symétriques.}$$

Soit $\mathfrak{k}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formé des matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} A & a & B & a \\ -{}^t a & 0 & -{}^t a & 0 \\ B & a & A & -b \\ -{}^t a & 0 & -{}^t a & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in M_{3,1}(\mathbb{R}), \quad A, B \in M_3(\mathbb{R}), \quad \text{anti-symétriques.}$$

Alors, $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{g}$, de dimension 9. On a, plus, la décomposition de Cartan: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, avec $\mathfrak{s}$ supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$, formé des matrices symétriques de $\mathfrak{g}$.

Soit

$$\mathfrak{h} = \left\{ H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \text{avec } \Omega = \begin{bmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ 0 & & x_3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \ \Omega \in M_4(\mathbb{R}) \right\}.$$

$\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{g}$.

On note: $\eta_i(H(x_1, x_2, x_3)) = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, l'application coordonnée correspondante. Le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ est de type B_3, donné par:

$$\Delta = \{ \pm(\eta_i \pm \eta_j), 1 \leqslant i < j \leqslant 3; \pm\eta_i, 1 \leqslant i \leqslant 3 \}$$

Soit $\Delta^+ = \{(\eta_i \pm \eta_j), \ 1 \leqslant i < j \leqslant 3; \ \eta_i, \ 1 \leqslant i \leqslant 3\}$, $\alpha_1 = \eta_1 - \eta_2$, $\alpha_2 = \eta_2 - \eta_3$, $\alpha_3 = \eta_3$ et $\Pi = \{\alpha_i, \ 1 \leqslant i \leqslant 3\}$ la base de racines simples de Δ. A chaque racine α de Δ^+, on associe, comme dans le paragraphe 2, les éléments H_α, X_α, $X_{-\alpha}$ d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$, l'élément $W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ de $\mathfrak{k}$ et la sous-algèbre $sl_2(\alpha)$, isomorphe à $sl_2(\mathbb{R})$, engendrée par $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$. Soit $H_1 = H(1, 0, 0)$, $H_2 = H(0, 1, 0)$, $H_3 = H(0, 0, 1)$. Alors, $H_{\eta_i \pm \eta_j} = H_i \pm H_j$ et $H_{\eta_i} = 2H_i$.

D'autre part, les crochets, dans $\mathfrak{g}$, sont donnés par: ($\partial_{ij}=1$ si $i<j$, $=-1$ sinon)

$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{\eta_j-\eta_k}]=X_{\eta_i-\eta_k}$$

$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{\eta_j+\eta_k}]=\partial_{ik}\partial_{jk}X_{\eta_i+\eta_k}$$

$$[X_{\eta_i+\eta_j}, X_{-\eta_j-\eta_k}]=-\partial_{ij}\partial_{jk}X_{\eta_i-\eta_k}$$

$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i-\eta_k}]=-\partial_{ik}\partial_{jk}X_{-\eta_j-\eta_k}$$

$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{\eta_j}]=X_{\eta_i}$$

$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i}]=-X_{-\eta_j}$$

$$[X_{\eta_i+\eta_j}, X_{-\eta_j}]=-\partial_{ij}X_{\eta_i}$$

$$[X_{\eta_i}, X_{\eta_j}]=-2\partial_{ij}X_{\eta_i+\eta_j}$$

$$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_j}]=2X_{\eta_i-\eta_j}$$

$$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_i-\eta_j}]=\partial_{ij}X_{-\eta_j}$$

$$[X_{-\eta_i}, X_{-\eta_j}]=2\partial_{ij}X_{-\eta_i-\eta_j}$$

Soit, enfin, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$, et $\mathfrak{b}$ les sous-algèbres associées à Δ, suivant (2).

3.1.2. *Le revêtement universel de $SO_o(4, 3)$ et son sous-groupe compact maximal.* Le groupe G désigne maintenant le revêtement connexe et simplement connexe, à quatre feuillets, de la composante neutre $SO_o(4, 3)$ de $SO(4, 3)$. Soit K le sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, dont nous utiliserons, par la suite, la réalisation suivante.

Soit $E=\langle \varepsilon_i,\ 1\leqslant i\leqslant 4\rangle$, $F=\langle \varepsilon_{i+4},\ 1\leqslant i\leqslant 4\rangle$ et $\mathfrak{k}'=so(4, 4)\cap so(8)$, qui laisse invariants respectivement les deux espaces E et F. Soit K' le sous-groupe analytique d'un revêtement simplement connexe de $SO(4, 4)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}'$. Dans ces conditions, K' s'identifie à un revêtement de $SO(E)\times SO(F)$. Désignons, ensuite, par $\mathbf{H}$ le corps des quaternions, $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ses générateurs usuels.

Soit

$$\begin{array}{ll} h_E\colon E\to\mathbf{H}, & h_F\colon F\to\mathbf{H} \\ \varepsilon_1\to\mathbf{1} & \varepsilon_5\to\mathbf{1} \\ \varepsilon_2\to\mathbf{i} & \varepsilon_6\to\mathbf{i} \\ \varepsilon_3\to\mathbf{j} & \varepsilon_7\to\mathbf{j} \\ \varepsilon_4\to\mathbf{k} & \varepsilon_8\to\mathbf{k} \end{array}$$

On sait que $SU(2)$ est la sphère unité de $\mathbf{H}$. Soit $S = SU(2)^4$. Posons ensuite:

$$\forall (a, b) \in SU(2)^2, \qquad \forall x \in E, \qquad \forall y \in F$$
$$a \cdot x \cdot b = h_E^{-1}(a \cdot h_E(x) \cdot b), \qquad a \cdot y \cdot b = h_F^{-1}(a \cdot h_F(y) \cdot b).$$

Alors, S agit sur $E \oplus F$ par: $(a, b, c, d) \cdot (x, y) = (a \cdot x \cdot b^{-1},\ c \cdot y \cdot d^{-1})$, et cette action permet d'identifier, via leurs algèbres de Lie, K' et S. Dans ces conditions, on a:

$$\begin{aligned} K &= \{(a, b, c, d) \in S / c \cdot \mathbf{k} \cdot d^{-1} = \mathbf{k}\} \\ &= \{(a, b, c, \mathbf{k}^{-1} \cdot c \cdot \mathbf{k}), (a, b, c) \in SU(2)^3\} \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, K s'identifie à $SU(2)^3$.

On définit, dans K, les éléments particuliers suivants: Pour t, t' éléments de $\{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned} 1(t, t') &= (t\mathbf{1}, t\mathbf{1}, t'\mathbf{1}), \\ i(t, t') &= (t\mathbf{i}, -t\mathbf{i}, t'\mathbf{i}), \\ j(t, t') &= (t\mathbf{j}, -t\mathbf{j}, t'\mathbf{j}), \\ k(t, t') &= (t\mathbf{k}, t\mathbf{k}, t'\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Alors, $Z(G) = \{1(t, t'), t, t' \in \{-1, 1\}\}$ est le centre de G.

Soit, pour $\alpha \in \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, $x_\alpha(t) = \exp_G tX_\alpha$, $w_\alpha(t) = \exp_G tW_\alpha$, $t \in \mathbb{R}^*$, $h_\alpha(t) = \exp_G \ln|t|\, H_\alpha$ un système de générateurs de G. En particulier, on posera $w_\alpha = w_\alpha(\pi/2)$. Dans K, les éléments w_α^2 s'expriment de la manière suivante:

$$\begin{aligned} w^2_{\eta_1 - \eta_2} &= i(-1, -1), & w^2_{\eta_1 + \eta_2} &= i(-1, 1), \\ w^2_{\eta_2 - \eta_3} &= k(-1, -1), & w^2_{\eta_2 + \eta_3} &= k(-1, 1) \\ w^2_{\eta_1 - \eta_3} &= j(-1, -1), & w^2_{\eta_1 + \eta_3} &= j(-1, 1), \end{aligned}$$
$$w^2_{\eta_1} = w^2_{\eta_2} = w^2_{\eta_3} = 1(-1, 1).$$

Soit, enfin, A et N les sous-groupes analytiques de G, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{n}^+$, M' et M, respectivement le normalisateur et le centralisateur de A dans K, $B = MAN$ le sous-groupe de Borel de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$.

Le groupe M' est engendré par les w_α, $\alpha \in \Delta$, tandis que M est engendré par les w_α^2. On vérifie facilement que M est d'ordre 16 et défini par:

$$M = \{1(t, t'), i(t, t'), j(t, t'), k(t, t'), t, t' \in \{-1, 1\}\}$$

Posons, une fois pour toutes:

$$w = w_{\eta_1 - \eta_2}, \qquad s = w_{\eta_1 - \eta_3}, \qquad \sigma = w_{\eta_3}$$

On constate, alors, que: $M = \langle w^2, s^2, \sigma^2 \rangle$, $Z(G) = \{1, \sigma^2, w^4, \sigma^2 \cdot w^4\}$ et que l'on a les formules suivantes:

$$w^2 \cdot s^2 = s^6 \cdot w^2, \qquad w^4 = s^4, \qquad w^8 = s^8 = 1 \tag{10}$$

3.1.3. *Sous-groupes paraboliques maximaux de G.* Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\mathfrak{p}_i$ la sous-algèbre parabolique maximale standard associée à la racine simple α_i, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$ sa décomposition de Langlands et P_i le sous-groupe parabolique de G correspondant. On rappelle que si $(M_i)_o$, A_i, N_i désignent respectivement les sous-groupes analytiques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{n}_i$, et si $Z_K(A_i)$ est le stabilisateur de A_i dans K, on a: $M_i = Z_K(A_i) \cdot (M_i)_o$ et $P_i = M_i \cdot A_i \cdot N_i$.

En fait, le lemme 1.2.4.5 de ([WA]) nous permet d'écrire: $M_i = M \cdot (M_i)_o$. Or, d'après ce qui précède, M est engendré par les w_α^2, $\alpha \in \Pi$. Il est facile de vérifier, ensuite, que l'on a des formules de commutation du type suivant:

$$\alpha, \alpha' \in \Pi, \qquad w_\alpha^2 \cdot w_{\alpha'}^2 = w_{\alpha'}^{\pm 2} \cdot w_\alpha^2$$

Notons Γ_a le sous-groupe de G engendré par a. A l'aide des définitions et en utilisant les formules de commutation citées précédemment, on obtient sans difficultés les résultats suivants:

(1) Soit $\Pi_1 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$, $\Delta(\Pi_1) = \{\pm(\eta_2 + \eta_3), \ \pm(\eta_2 - \eta_3), \ \pm(\eta_2), \pm(\eta_3)\}$

- $\Delta_1 = \Delta - \Delta(\Pi_1)$, $\Delta_1^+ = \Delta_1 \cap \Delta^+ = \{\eta_1 - \eta_2, \ \eta_1 + \eta_2, \ \eta_1 - \eta_3, \eta_1 + \eta_3, \eta_1\}$.
- $\mathfrak{h}_1 = \langle H_{\alpha_2}, H_{\alpha_3} \rangle$
- $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_1) \rangle$
- $\mathfrak{a}_1 = \langle H_{\eta_1} \rangle$
- $\mathfrak{n}_1 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_1^+ \rangle$
- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 16 de $\mathfrak{g}$.
- $M_1 = \Gamma_{w^2} \cdot (M_1)_o$, $P_1 = \Gamma_{w^2} \cdot (P_1)_o$.

(2) Soit $\Pi_2 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\Delta(\Pi_2) = \{\pm(\eta_1 - \eta_2), \ \pm(\eta_3)\}$

- $\Delta_2 = \Delta - \Delta(\Pi_2)$, $\Delta_2^+ = \Delta_2 \cap \Delta^+ = \{\eta_2, \eta_1 + \eta_2, \eta_1 \pm \eta_3, \eta_2 \pm \eta_3, \eta_1\}$.
- $\mathfrak{h}_2 = \langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_3} \rangle$

- $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_2) \rangle$
- $\mathfrak{a}_2 = \langle H_{\eta_1 + \eta_2} \rangle$
- $\mathfrak{n}_2 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_2^+ \rangle$
- $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 14 de $\mathfrak{g}$.
- $M_2 = \Gamma_{s^2} \cdot (M_2)_o$, $P_2 = \Gamma_{s^2} \cdot (P_2)_o$.

(3) Soit $\Pi_3 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\Delta(\Pi_3) = \{\pm(\eta_1 - \eta_2), \pm(\eta_1 - \eta_3), \pm(\eta_2 - \eta_3)\}$

- $\Delta_3 = \Delta - \Delta(\Pi_3)$, $\Delta_3^+ = \Delta_3 \cap \Delta^+ = \{\eta_1, \eta_2, \eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_1 + \eta_3, \eta_3\}$.
- $\mathfrak{h}_3 = \langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2} \rangle$
- $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{h}_3 \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_3) \rangle$
- $\mathfrak{a}_3 = \langle H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3} \rangle$
- $\mathfrak{n}_3 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_3^+ \rangle$
- $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{n}_3$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 15 de $\mathfrak{g}$.
- $M_3 = \Gamma_{\sigma^2} \cdot (M_3)_o$, $P_3 = \Gamma_{\sigma^2} \cdot (P_3)_o$.

Posons maintenant $P_{ij} = P_i \cap P_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$.

La détermination de la décomposition de Langlands de chacun de ces sous-groupes se fait de la même manière. On constate que $M_{ij} = \Gamma_{ij} \cdot (M_{ij})_o$, où Γ_{ij} est le sous-groupe de K engendré par $w_{\alpha_i}^2$ et $w_{\alpha_j}^2$. Citons, sans autres commentaires, les résultats obtenus.

Le parabolique P_{12}.

- $\mathfrak{m}_{12} = sl_2(\eta_3)$
- $\mathfrak{a}_{12} = \langle H_{\eta_1 - \eta_2}, H_{\eta_1 + \eta_2} \rangle$
- $\mathfrak{n}_{12} = \langle X_{\eta_1 \pm \eta_3}, X_{\eta_2 \pm \eta_3}, X_{\eta_1 \pm \eta_2}, X_{\eta_1}, X_{\eta_2} \rangle$
- $M_{12} = \Gamma_{(s^2, w^2)} \cdot (M_{12})_o$ et $P_{12} = M_{12} A_{12} N_{12} = \Gamma_{(s^2, w^2)} \cdot (P_{12})_o$

où $\Gamma_{(s^2, w^2)}$ est le sous-groupe de K engendré par s^2 et w^2.

Le parabolique P_{13}.

- $\mathfrak{m}_{13} = sl_2(\eta_2 - \eta_3)$
- $\mathfrak{a}_{13} = \langle H_{\eta_1}, H_{\eta_2 + \eta_3} \rangle$
- $\mathfrak{n}_{13} = \langle X_{\eta_1 \pm \eta_3}, X_{\eta_2 + \eta_3}, X_{\eta_1 \pm \eta_2}, X_{\eta_1}, X_{\eta_2} X_{\eta_3} \rangle$
- $M_{13} = \Gamma_{(w^2, \sigma^2)} \cdot (M_{13})_o$ et $P_{13} = M_{13} A_{13} N_{13} = \Gamma_{(w^2, \sigma^2)} \cdot (P_3)_o$

Le parabolique P_{23}.

- $\mathfrak{m}_{23} = sl_2(\eta_1 - \eta_2)$
- $\mathfrak{a}_{23} = \langle H_{\eta_1+\eta_2}, H_{\eta_3} \rangle$
- $\mathfrak{n}_{23} = \langle X_{\eta_1 \pm \eta_3}, X_{\eta_2 \pm \eta_3}, X_{\eta_1+\eta_2}, X_{\eta_1}, X_{\eta_2} X_{\eta_3} \rangle$
- $M_{23} = \Gamma_{(s^2, \sigma^2)} \cdot (M_{23})_o$ et $P_{23} = M_{23} A_{23} N_{23} = \Gamma_{(s^2, \sigma^2)} \cdot (P_{23})_o$.

3.2. *Admissibilité de la G-orbite minimale*

La plus haute racine du système Δ est ici $\beta = \eta_1 + \eta_2$ et l'orbite nilpotente minimale $O_{\min}$ est de dimension 8 ([JO 1]).

Le stabilisateur $\mathfrak{g}(X_{-\beta})$ est donné par: $\mathfrak{g}(X_{-\beta}) = sl_2(\eta_1 - \eta_2) \oplus sl_2(\eta_3) + \mathfrak{n}^-$. Posons:

$$\mathfrak{r}(\beta) = sl_2(\eta_1 - \eta_2) \oplus sl_2(\eta_3),$$

$$\mathfrak{n}(\beta) = \langle X_{-(\eta_1 \pm \eta_3)}, X_{-(\eta_2 \pm \eta_3)}, X_{-(\eta_1+\eta_2)}, X_{-\eta_1}, X_{-\eta_2} \rangle.$$

Soit $R(\beta)$ un facteur réductif de $G(X_{-\beta})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}(\beta)$.

Proposition 3.2.1. *Le stabilisateur $G(X_{-\beta})$ est un sous-groupe connexe de G.*

Preuve. Nous allons déterminer, en fait, $K \cap G(X_{-\beta}) = K \cap R(\beta)$. Soit $P_2^- = M_2 \cdot A_2 \cdot N_2^-$ le parabolique opposé de P_2. Il est facile de constater que $G(\mathbb{R}X_{-\beta}) = P_2^-$. Désignons par χ_β le caractère de $G(\mathbb{R}X_{-\beta})$ défini par: $\forall x \in G(\mathbb{R}X_{-\beta})$, $\mathrm{Ad}\, x \cdot X_{-\beta} = \chi_\beta(x) \cdot X_{-\beta}$. On voit que $G(X_{-\beta}) = \ker \chi_\beta$ et on a les inclusions: $K \cap G(X_{-\beta}) \subset K \cap G(\mathbb{R}X_{-\beta}) \subset M_2$. Il suffit, alors, de vérifier que $\chi_\beta(s^2) < 0$ pour en déduire que: $K \cap G(X_{-\beta}) \subset (G(X_{-\beta})_o$.

On constate, ensuite, que le sl_2-triplet $(X_\beta, X_{-\beta}, H_\beta)$ est θ-stable. En utilisant le lemme 6.10 de [VO 2], on en déduit que $K \cap G(X_{-\beta})$ est un sous-groupe compact maximal de $G(X_{-\beta})$, ce qui démontre que $G(X_{-\beta}) = G(X_{-\beta})_o$ et achève la preuve de la proposition.

Désignons par $\exp sl_2(\alpha)$ le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $sl_2(\alpha)$.

- On suppose, tout d'abord, α racine courte. On constate, que, dans ce cas, on a:

$$\exp tW_\alpha = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Cette équivalence implique l'existence d'un isomorphisme de $\exp sl_2(\alpha)$ sur $SL_2(\mathbb{R})$. Pour cette raison, nous poserons: $\exp sl_2(\alpha) = SL_2(\alpha)$.

- Supposons, maintenant, α racine longue. On a, cette fois:

$$\exp tW_\alpha = 1 \Leftrightarrow t = 4k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où l'existence d'un isomorphisme de $\exp sl_2(\alpha)$ sur un revêtement connexe à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$, noté $RSL2(\mathbb{R})$, dont nous utiliserons la réalisation suivante:

Soit $\mathscr{P}$ le demi-plan de Poincaré. Pour $x = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ dans $SL_2(\mathbb{R})$ et z dans $\mathscr{P}$, on pose: $x \cdot z = az + b/cz + d$. Alors, on a:

$$RSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ (x, f),\ x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),\ f \text{ fonction holomorphe sur } \mathscr{P}, \right.$$

$$\left. \text{telle que: } f(z)^2 = cz + d \right\}$$

La loi de groupe sur $RSL_2(\mathbb{R})$ est donnée par: $(x, f) \cdot (x', f') = (xx', f'')$, avec $f''(z) = f(x'z)\, f'(z)$.

Posons: $RSL_2(\alpha) = \exp sl_2(\alpha)$. L'isomorphisme de $RSL_2(\alpha)$ sur $RSL_2(\mathbb{R})$ est alors donné par:

$$w_\alpha(t) \to \left[\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, f_w \right], \qquad \text{avec} \quad f_w^2(z) = \cos t - z \sin t,$$

$$f_w(i) = e^{-i(t/2)}$$

$$x_\alpha(u) \to \left[\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right]$$

$$h_\alpha(v) \to \left[\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1/v \end{pmatrix}, v^{-1/2} \right], \qquad v > 0.$$

On peut donc écrire: $R(\beta) = RSL_2(\eta_1 - \eta_2) \times SL_2(\eta_3)$, et nous utiliserons, dorénavant, pour ces groupes les identifications décrites précédemment.

L'espace symplectique $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{-\beta})$ s'identifie à l'espace $\mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$. Soit $\mathfrak{l} = \langle X_{(\eta_1 \pm \eta_3)},\ X_{(\eta_1 + \eta_2)},\ X_{\eta_1} \rangle$ un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{-\beta})$. Suivant 1.2, on définit l'extension $R(\beta)^{\mathfrak{g}}$ par:

$$R(\beta)^{\mathfrak{g}} = \{ (x, t(x)),\ x \in G(X_{-\beta}) \text{ et } t(x) \text{ racine carrée de}$$

$$s(x)(\mathfrak{l})^{-1} \}.$$

Il est facile de constater que, pour tout x de $SL_2(\eta_3)$, on a: $x \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{l}$, et $s(x)(\mathfrak{l}) = 1$, ce qui permet d'identifier $SL_2(\eta_3)$ à un sous-groupe de $R(\beta)^{\mathfrak{g}}$. De ceci et des définitions, on déduit alors que $R(\beta)^{\mathfrak{g}}$ est isomorphe au produit direct de $SL_2(\eta_3)$ et de $RSL_2(\eta_1 - \eta_2)^{\mathfrak{g}}$.

Il nous reste à caractériser l'extension $RSL_2(\eta_1 - \eta_2)^{\mathfrak{g}}$, ce qui revient à en déterminer un sous-groupe compact maximal. Pour cela, on considère la base suivante de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\perp}$:

$$X_{\eta_1 + \eta_3},\ X_{\eta_1 - \eta_3},\ X_{\eta_1},\ X_{\eta_1 + \eta_2},\ -\tfrac{1}{2} X_{\eta_2 - \eta_3},\ -\tfrac{1}{2} X_{\eta_2 + \eta_3},\ -\tfrac{1}{4} X_{\eta_2},\ \tfrac{1}{4} H_{\eta_1 + \eta_2}.$$

On constate que cette base satisfait bien aux hypothèses qui permettent d'identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\perp}$ à $\mathbb{C}^4$ et, en utilisant la proposition 1.2.1, on en déduit que $RU(4)$ est un sous-groupe compact maximal de $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\perp})$. L'extension $RSL_2(\eta_1-\eta_2)^{\mathfrak{g}}$ est alors entièrement déterminée par la donnée de $(w(t), t(w(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, et il résulte de calculs classiques dans $U(4)$ que:

$$k\pi < t < (k+1)\,\pi, \qquad t(w(t)) = \exp(-i(\pi/4 + k\pi/2))$$

$$t = k\pi, \qquad t(w(t)) = \exp(-ik\pi/2)$$

On constate, alors, que: $t(w(t)) = 1 \Leftrightarrow t = 4k\pi$.

Soit F: $RSL_2(\eta_1-\eta_2) \to RSL_2(\eta_1-\eta_2)^{\mathfrak{g}}$ définie par: $F(x) = (x, t(x))$. De ce qui précède, on déduit, alors, que F est un morphisme continu et injectif de groupes. D'où:

LEMME 3.2.1. (1) *Le morphisme F identifie $RSL_2(\eta_1-\eta_2)$ à la composante neutre de $RSL_2(\eta_1-\eta_2)^{\mathfrak{g}}$.*

(2) *L'extension métaplectique $R(\beta)^{\mathfrak{g}}$ possède exactement deux composantes connexes.*

Remarque. Les calculs précédents, en particulier, nous donnent:

$$t(w) = \exp(-i\pi/4), \qquad t(w^2) = -i, \qquad t(w^4) = -1 \tag{11}$$

Venons-en à l'admissibilité de $O_{\min}$. Si f est l'élément de $\mathfrak{g}^*$ correspondant à $-\beta$, on déjà vu que $f_{|\mathfrak{g}(f)} = 0$, si bien que $i_{|\mathfrak{g}(f)}$ est la différentielle du caractère trivial de $G(X_{-\beta})$. En conséquence, compte tenu des lemmes 1.3.1, 3.2.1, et de la proposition 3.2.1, on a:

PROPOSITION 3.2.2. *L'orbite nilpotente minimale $O_{\min}$ est G-admissible, et possède un seul paramètre d'admissibilité. On notera χ l'unique caractère de $R(\beta)^{\mathfrak{g}}$ qui vérifie*:

$$\chi(x) = 1, \text{ si } x \in R(\beta) \text{ (identifié à un sousgroupe de } R(\beta)^{\mathfrak{g}}), \quad \chi(\varepsilon) = -1.$$

3.3. *Les P_i-représentations unipotentes*

A chaque parabolique maximal P_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, on peut donc associer, suivant les propositions 2.2.2 et 2.3.1, la forme de type unipotent q_i, la sous-algèbre acceptable canonique $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_{q_i}$, le caractère χ_i restriction de χ à $P_i(X_{-\beta})^{\mathfrak{p}_i}$, et enfin la P_i-représentation unipotente $\pi_i = \pi_{P_i, \tau}$ associée, par la définition 1.3.2, à la P_i-orbite dense. Le but de ce paragraphe est de définir les représentations π_i.

LEMME 3.3.1. *Soit $P_i(\beta)$ le stabilisateur de q_i dans P_i, $R_i(\beta)$, $N_i(\beta)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, respectivement un facteur réductif et le radical unipotent de $P_i(\beta)$, $\mathfrak{r}_i(\beta)$, $\mathfrak{n}_i(\beta)$ leurs algèbres de Lie.*

(1) $R_1(\beta) = \Gamma_{w^2} \cdot R_1(\beta)_o$, $\mathfrak{r}_1(\beta) = sl_2(\eta_3) \oplus \langle H_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$,
$\mathfrak{n}_1(\beta) = \langle X_{-(\eta_2 \pm \eta_3)}, X_{-\eta_2}, X_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$

(2) $R_2(\beta) = R(\beta)$, $\mathfrak{n}_2(\beta) = 0$

(3) $R_3(\beta) = \Gamma_{\sigma^2} \cdot R_3(\beta)_o$, $\mathfrak{r}_3(\beta) = sl_2(\eta_1 - \eta_2) \oplus \langle H_{\eta_3} \rangle$,
$\mathfrak{n}_3(\beta) = \langle X_{\eta_3 - \eta_1}, X_{\eta_3 - \eta_2}, X_{\eta_3} \rangle$

Preuve. Les calculs se font de manière tout à fait analogue dans les trois cas. Montrons, par exemple, (1). Le seul point à préciser est la détermination du facteur réductif $R_1(\beta)$, ce qui revient à déterminer un sous-groupe compact maximal de $P_1(\beta)$. Or, d'après la proposition 2.2.3, $K \cap P_1(\beta)$ est un tel sous-groupe, $K \cap P_1(\beta) = (K \cap P_1) \cap (K \cap G(X_{-\beta}))$, et $K \cap P_1$ nous est donné par:

$$K \cap P_1 = \Gamma_{w^2} \cdot \exp(m_1 \cap \mathfrak{k}) = \Gamma_{w^2} \cdot \{(a, a, \exp t\mathbf{k}), a \in SU(2), t \in \mathbb{R}\}$$

Il est facile de vérifier, ensuite, que: $K \cap G(X_{-\beta}) = \{(\exp t \cdot \mathbf{i}, \exp t \cdot \mathbf{i}, \exp(t - t'/2) \cdot \mathbf{i}), t, t' \in \mathbb{R}\}$. Le résultat s'en suit.

Notons maintenant $\mathfrak{u}_i$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}_i$. On obtient:

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{n}_1 \oplus \langle X_{-\eta_2 \pm \eta_3}, X_{-\eta_2} \rangle,$$

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{n}_2$$

$$\mathfrak{u}_3 = \mathfrak{n}_3 \oplus \langle X_{\eta_3 - \eta_1}, X_{\eta_3 - \eta_2} \rangle$$

Soit μ_i la restriction de q_i à $\mathfrak{u}_i$. On constate, ensuite, que:

- $\mathfrak{b}_1$ est une polarisation de $\mathfrak{p}_1$ relativement à q_1 et $\mathfrak{u}_1$ une polarisation relativement à μ_1.
- $\mathfrak{l}$ est une polarisation de $\mathfrak{u}_2$, relativement à μ_2.
- $\mathfrak{l}_3 = \langle X_{\eta_3 \pm \eta_1}, X_{\eta_3 \pm \eta_2}, X_{\eta_1}, X_{\eta_3}, X_{\eta_1 + \eta_2} \rangle$ est une polarisation de $\mathfrak{u}_3$, relativement à μ_3.

Soit, enfin, U_i (resp. L_i) le sous-groupe de P_i d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_i$ (resp. $\mathfrak{l}_i$), $B_i = R_i(\beta) \cdot U_i$ et t_i le caractère de L_i, défini par:

$$\forall X \in \mathfrak{l}_i, \qquad t_i(\exp X) = e^{-2i\pi\mu_i(X)}.$$

LEMME 3.3.2. *Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, les extensions $R_i(\beta)^{\mathfrak{p}_i}$ et $R_i(\beta)^{\mathfrak{u}_i}$ sont égales.*

Preuve. La démonstration de ce résultat se fait au cas par cas. On remarque, tout d'abord, que $\mathfrak{l}_i + \mathfrak{p}_i(\beta)$ est un sous-espace isotrope maximal de $\mathfrak{p}_i$, et on note $\mathfrak{l}'_i$ un supplémentaire de $\mathfrak{l}_i \cap \mathfrak{p}_i(\beta)$ dans $\mathfrak{l}_i$. A chaque x de $R_i(\beta)$, on associe, ensuite, le complexe $t(x)$ (resp. $t'(x)$), égal à une racine carrée de $s(x)(\mathfrak{l}'_i)^{-1}$ (resp. $s(x)(\mathfrak{l}_i/\mathfrak{u}_i(\beta))^{-1}$), puis son représentant $(x, t(x))$ (resp. $(x, t'(x))$) dans $R_i(\beta)^{\mathfrak{p}_i}$ (resp. $R_i(\beta)^{\mathfrak{u}_i}$). Il suffit, alors, de vérifier que: $t(x)^2 = t'(x)^2$.

Soit enfin T_i la représentation de U_i associée à μ_i par la correspondance de Kirillov, $\mathscr{L}_i$ l'espace de cette représentation, et S_i la représentation métaplectique de $R_i(\beta)^{\mathfrak{u}_i}$ dans $\mathscr{L}_i$. La représentation de B_i dans $\mathscr{L}_i$, définie par (4), est, dans ces conditions, donnée par:

$$\forall x \in R_i(\beta), \qquad \forall y \in U_i, \qquad (\chi_i \otimes S_i \cdot T_i)(xy) = \chi(x, t(x)) \cdot S_i(x, t(x)) \cdot T_i(y)$$

Ainsi, on a:

$$\pi_i = \operatorname{Ind}_{B_i}^{P_i} (\chi_i \otimes S_i \cdot T_i) \tag{12}$$

On notera δ_i la fonction module de B_i relativement à P_i, et $\mathfrak{H}_i$ l'espace de π_i, défini par 1.3.

Remarque. Le fait que $\mathfrak{b}_1$ soit une polarisation de $\mathfrak{p}_1$ simplifie considérablement l'écriture de π_1. En effet, dans ce cas, on a: $T_1 = t_1$ et $\forall (x, t(x)) \in R_1(\beta)^{\mathfrak{u}_1}$, $S_1(x, t(x)) = t(x)$ si bien que la représentation $\chi_1 \otimes S_1 \cdot T_1$ n'est autre que le caractère t_{χ_1} défini par:

$$\forall x \in R_1(\beta), \qquad \forall y \in U_1, \qquad t_{\chi_1}(xy) = t(x)\, \chi(x, t(x))\, t_1(y). \tag{13}$$

La représentation π_1 est alors l'induite à P_1 de ce caractère.

3.4. *Une représentation unipotente de G*

Notre but est de pouvoir appliquer le théorème 2.4.2 et de construire la représentation de G correspondante. Tout revient donc à montrer que les trois représentations π_i satisfont aux deux hypothèses de ce théorème.

PROPOSITION 3.4.1. *Pour tous (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ les restrictions de π_i et π_j à P_{ij} sont deux P_{ij}-représentations unipotentes équivalentes associées à la P_{ij}-orbite dense.*

Preuve. La démonstration de ce résultat se fait encore au cas par cas. Nous nous intéressons ici au parabolique P_{12}, les autres cas s'envisageant de manière tout à fait analogue.

- Soit q_{12} la restriction de q_1 à $\mathfrak{p}_{12}$, $\mathfrak{b}_{12} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{p}_{12}$ et $B_{12} = B_1 \cap P_{12}$. On vérifie que $\mathfrak{b}_{12}$ est une sous-algèbre acceptable, et même une polarisation, relativement à q_{12}. Suivant la méthode des orbites du paragraphe 1, on peut donc associer à $\mathfrak{b}_{12}$ une P_{12}-représentation unipotente, notée π_{12}, qui n'est autre que la représentation définie par: $\pi_{12} = \mathrm{Ind}_{B_{12}}^{P_{12}} t_{\chi_{12}}$ où $t_{\chi_{12}}$ est la restriction à B_{12} de t_{χ_1}. Désignons par $\mathfrak{H}_{12}$ l'espace de π_{12}. La description de cet espace est donnée par 1.3. Toutefois le choix de la quasi-mesure P_{12}-invariante qui sert à définir $\mathfrak{H}_{12}$ se fait, ici, de la manière suivante.

Le fait que $\dim(\mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{b}_1) = \dim \mathfrak{p}_1$ implique que $P_{12} \cdot B_1$ est un ouvert de P_1. D'autre part, il est facile de vérifier que cet ouvert contient la "grosse cellule" de Bruhat de P_1, associée au groupe réductif M_1. Il résulte de ceci que l'on peut identifier P_{12}/B_{12} à un ouvert de P_1/B_1 de complémentaire m-négligeable, m désignant une mesure quasi-invariante sur P_1/B_1.

D'après ([BOU], ch. 7, par. 2), il existe une fonction H appartenant à $\mathfrak{C}_1$ (qui est l'analogue de l'espace $\mathfrak{C}$ de 1.3 pour $\mathfrak{H}_1$), continue et strictement positive, de sorte que l'application $f \to f/H$ est un isomorphisme de $\mathfrak{C}_1$ sur $C_c(P_1/B_1)$. Soit m_H l'image de la mesure m_1 (qui sert à définir $\mathfrak{H}_1$) par cet isomorphisme. Alors, m_H est une mesure quasi-invariante sur P_1/B_1 et ne dépend pas du choix de H.

Par ailleurs, l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{p}_{12}/\mathfrak{b}_{12}$ sur $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{b}_1$ implique que la fonction module de B_{12} relativement à P_{12} n'est autre que la restriction de δ_1 à B_{12}. On en déduit que, si $\mathfrak{C}_{12}$ désigne l'analogue de $\mathfrak{C}$ pour $\mathfrak{H}_{12}$, l'application de restriction de $\mathfrak{C}_1$ est à valeurs dans $\mathfrak{C}_{12}$. La restriction de m_H à l'ouvert P_{12}/B_{12} définit une mesure quasi-invariante $m_{H'}$ sur P_{12}/B_{12}, H' désignant la restriction de H à P_{12}.

On choisira donc la quasi-mesure P_{12}-invariante m_{12} de telle sorte que:

$$\forall f \in \mathfrak{C}_{12}, \qquad m_{12}(f) = m_{H'}(f/H').$$

On a, alors, la propriété suivante: Pour tout f de $\mathfrak{C}_1$,

$$\int_{P_1/B_1} f(x)\, dm_1(x) = \int_{P_{12}/B_{12}} f_{|P_{12}}(x)\, dm_{12}(x) \tag{14}$$

Soit $\mathfrak{R}_1(f) = f_{|P_{12}}$. Compte tenu des choix faits précédemment et de (14), il est clair que $\mathfrak{R}_1$ est un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_{12}$ qui entrelace les représentations $\pi_{1|P_{12}}$ et π_{12}, d'où la première assertion.

- Posons maintenant $\mathfrak{b}'_{12} = \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{p}_{12}$. On vérifie facilement que $\mathfrak{b}'_{12}$ est la sous-algèbre acceptable canonique de $\mathfrak{p}_{12}$. On peut donc associer à $\mathfrak{b}'_{12}$ une P_{12}-représentation unipotente π'_{12}, selon la méthode de M. Duflo, qui, d'après le théorème 1.3.2, est équivalente à π_{12}. Tout revient, alors, à démontrer que la restriction de π_2 à P_{12} est équivalente à π'_{12}.

Décrivons, tout d'abord, π'_{12}.

Le radical unipotent de $\mathfrak{b}'_{12}$ est $\mathfrak{n}_{12}$. Soit μ_{12} la restriction de q_{12} à $\mathfrak{n}_{12}$. On vérifie aisément que $\mathfrak{n}_1$ est une polarisation de $\mathfrak{n}_{12}$ relativement à μ_{12}.

Soit T'_{12} la représentation de N_{12} associée à μ_{12} par la correspondance de Kirillov, et $\mathfrak{L}'_{12}$ l'espace de cette représentation. On vérifie ensuite, comme dans le lemme 3.3.2, que les extensions $R_1(\beta)^{\mathfrak{p}_{12}}$ et $R_1(\beta)^{\mathfrak{n}_{12}}$ sont égales, et on note S'_{12} la représentation métaplectique de $R_1(\beta)^{n_{12}}$ dans $\mathfrak{L}'_{12}$. Soit $B'_{12} = R_1(\beta) \cdot N_{12}$. Alors, on a:

$$\pi'_{12} = \mathrm{Ind}_{B'_{12}}^{P_{12}}(\chi_1 \otimes S'_{12}\, T'_{12})$$

et on note $\mathfrak{H}'_{12}$ l'espace de π'_{12}. Il est facile de voir que $P_{12}.\, B_2$ est un ouvert dense de P_2 et on peut ainsi définir l'espace $\mathfrak{H}'_{12}$ de π'_{12} à l'aide d'une mesure m'_{12} vérifiant:

$$\forall f \in \mathfrak{C}_2, \qquad \int_{P_2/B_2} f(x)\, dm_2(x) = \int_{P_{12}/B'_{12}} f_{|P_{12}}(x)\, dm'_{12}(x)$$

On est donc ramené à démontrer que la restriction de la représentation $\chi_2 \otimes S_2\, T_2$ à B'_{12} est équivalente à $\chi_1 \otimes S'_{12}\, T'_{12}$.

On remarque, dans un premier temps, que les espaces $\mathfrak{n}_2/\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{n}_{12}/\mathfrak{n}_1$ sont isomorphes. On a, en effet, les décompositions suivantes: $\mathfrak{n}_{12} = \mathfrak{n}_2 \oplus \langle X_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$ et $\mathfrak{n}_1 = l \oplus \langle X_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$. De ceci, on déduit un isomorphisme des variétés N_2/L et N_{12}/N_1, et un opérateur unitaire θ_2 qui entrelace T_2 et la restriction de T'_{12} à N_2, défini simplement par:

$$\begin{gathered} \forall x \in N_{12} = \exp \mathbb{R} X_{\eta_1 - \eta_2} \cdot N_2, \qquad x = x_{\eta_1 - \eta_2}(t) \cdot x_2, \\ \theta_2(f)(x) = f(x_2), \qquad \forall f \in \mathscr{L}_2 \end{gathered} \tag{15}$$

On a, d'autre part, la décomposition: $B'_{12} = R_1(\beta) \exp \mathbb{R} X_{\eta_1 - \eta_2} \cdot N_2$.

Le caractère χ est trivial sur le sous-groupe $\exp \mathbb{R} X_{\eta_1 - \eta_2}$. De plus, on remarque que $\mathrm{Ad}\, x_{\eta_1 - \eta_2}(t) \cdot \mathfrak{n}_1$ est égal à $\mathfrak{n}_1$ et, donc, que l'extension métaplectique de $\exp \mathbb{R} X_{\eta_1 - \eta_2}$ est triviale. Ceci implique que:

$$(\chi_2 \otimes S_2\, T_2)_{|B'_{12}} = (\chi_1 \otimes S_2\, T_2)_{|B'_{12}}$$

Enfin, on remarque que: $\mathfrak{n}_2(\mu_2) = \langle X_{\eta_1 + \eta_2} \rangle$, tandis que: $\mathfrak{n}_{12}(\mu_{12}) = \langle X_{\eta_1 - \eta_2},\ X_{\eta_1 + \eta_2} \rangle$, si bien que les espaces symplectiques $\mathfrak{n}_2/\mathfrak{n}_2(\mu_2)$ et $\mathfrak{n}_{12}/\mathfrak{n}_{12}(\mu_{12})$ sont égaux. On en déduit que les extensions métaplectiques $R_1(\beta)^{\mathfrak{n}_2}$, $R_1(\beta)^{\mathfrak{n}_{12}}$ et $R_1(\beta)^{\mathfrak{p}_2}$ sont égales.

Soit $(x, t(x))$ un élément quelconque de l'extension précédente, soit $f \in \mathscr{L}_2$ et $y \in N_{12}$. Le fait que: $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{l} \oplus \langle X_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$ et $x \cdot \mathfrak{n}_1 = x \cdot \mathfrak{l} \oplus \langle X_{\eta_1 - \eta_2} \rangle$ impliquent nécessairement que les espaces $\mathfrak{n}_1/(x \cdot \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_1)$ et $\mathfrak{l}/(x \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l})$ sont isomorphes, et de même pour $N_1/(x \cdot N_1 \cap N_1)$ et $L/(x \cdot L \cap L)$.

D'où:

$$S'_{12}(x, t(x))\, \theta_2(f)\,(y) = \frac{t(x)}{\|A(x)\|} \int_{N_1/x \cdot N_1 \cap N_1} \theta_2(f)(x^{-1}yzx)\, t_{12}(z)\, dz$$

$$= \frac{t(x)}{\|A(x)\|} \int_{L/x \cdot L \cap L} \theta_2(f)(x^{-1}yzx)\, t_2(z)\, dz$$

$$= \frac{t(x)}{\|A(x)\|} \int_{L/x \cdot L \cap L} \theta_2(f)(x^{-1}y_2\, x_{\eta_1 - \eta_2}(t)\, zx)\, t_2(z)\, dz$$

en utilisant une décomposition de y dans

$N_{12} = N_2 \cdot \exp \mathbb{R}X_{\eta_1 - \eta_2}$

$$= \frac{t(x)}{\|A(x)\|} \int_{L/x \cdot L \cap L} \theta_2(f)(x^{-1}y_2\, zx x_{\eta_1 - \eta_2}(u))\, t_2(z)\, dz$$

en utilisant le fait que L et $\exp \mathbb{R}X_{\eta_1 - \eta_2}$

commutent et que$R_1(\beta)$ laisse stable $\exp \mathbb{R}X_{\eta_1 - \eta_2}$

$$= \frac{t(x)}{\|A(x)\|} \int_{L/x \cdot L \cap L} f(x^{-1}y_2\, zx)\, t_2(z)\, dz$$

$$= \theta_2(S_2(x, t(x)) \cdot f)(y)$$

On déduit donc la formule: $S'_{12}(x, t(x)) \cdot \theta_2(f) = \theta_2(S_2(x, t(x)) \cdot f)$, pour tout f de $\mathfrak{L}_2$, et pour tout x de $R_1(\beta)$. De cela et de ce qui précède, on déduit que θ_2 entrelace les représentations $(\chi_2 \otimes S_2\, T_2)_{|B'_{12}}$ et $\chi_1 \otimes S'_{12}\, T'_{12}$ et on obtient ainsi le résultat souhaité.

Proposition 3.4.2. *Pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, la restriction de π_i à B est irréductible.*

Preuve. Il suffit de montrer que la restriction de π_1 à B est irréductible, ou encore qu'elle est équivalente à une B-représentation unipotente associée à la B-orbite dense.

Soit $\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b} = \langle H_{\eta_1 - \eta_2},\ H_{\eta_3} \rangle \oplus \langle X_{\eta_1 - \eta_2},\ X_{\eta_1 + \eta_2},\ X_{\eta_1},\ X_{\eta_3},\ X_{\eta_1 - \eta_3},\ X_{\eta_1 + \eta_3} \rangle$, et $q_{\mathfrak{b}}$ la restriction de f à $\mathfrak{b}$. On montre que $\mathfrak{b}^1$ est une sous-algèbre de type fortement unipotent, relativement à $q_{\mathfrak{b}}$ qui, de plus, est B-invariante. On constate, d'autre part, que le radical unipotent ${}^u\mathfrak{b}^1$ de $\mathfrak{b}^1$ est une polarisation relativement à la restriction $\mu_{\mathfrak{b}}$ de $q_{\mathfrak{b}}$ à ${}^u\mathfrak{b}^1$.

Soit $B_1^1 = R_{13}(\beta) \cdot N_{\mathfrak{b}^1}$, où $N_{\mathfrak{b}^1}$ est le sous-groupe unipotent de B, d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{b}^1$, $\chi_{\mathfrak{b}}$ la restriction de χ à $R_{13}(\beta)^{\mathfrak{b}}$, et $t_{\mathfrak{b}}$ le caractère de $N_{\mathfrak{b}^1}$ associé à $\mu_{\mathfrak{b}}$. On définit, comme dans (13), le caractère $t_{\chi_{\mathfrak{b}}}$ de B_1^1 par:

$$\forall x \in R_{13}(\beta), \qquad \forall (x, t(x)) \in R_{13}(\beta)^{\mathfrak{b}},$$
$$\forall y \in N_{\mathfrak{b}^1}, \qquad t_{\chi^{\mathfrak{b}}}(xy) = t(x) \cdot \chi(x, t(x)) \cdot t_{\mathfrak{b}}(y)$$

On en déduit alors la B-représentation unipotente π_B définie par: $\pi_B = \mathrm{Ind}_{B_1^1}^{B}\, t_{\chi^{\mathfrak{b}}}$. Enfin, en adaptant à cette situation la preuve de la proposition 3.4.1, on montre que la restriction de π_1 à B est équivalente à π_B, ce qui nous donne le résultat.

Les propositions 3.4.1 et 3.4.2 nous permettent de prouver que la famille de représentations $(\pi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3)$ satisfait aux hypothèses du théorème 2.4.2. D'où le théorème suivant:

THÉORÈME 3.4.1. *Soit G le revêtement universel de $SO_o(4, 3)$, B un sous-groupe de Borel de G et $(P_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3)$ la famille des sous-groupes paraboliques maximaux standards de G.*

(1) *Il existe une et seule famille $(\pi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3)$ de P_i-représentations unipotentes, associée à l'orbite nilpotente minimale $O_{\min}$.*

(2) *Il existe une et une seule représentation unitaire irréductible π de G, à équivalence près, telle que sa restriction à chaque P_i soit égale à π_i.*

3.5. *Réalisation de π dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$*

L'étape suivante consiste à donner de π une réalisation explicite. On constate que G est engendré par P_1 et l'élément w de P_2, si bien que π sera entièrement déterminée par la donnée des opérateurs $\pi(x)$, x parcourant un système de générateurs de P_1, et $\pi(w)$. Il convient donc, dans un premier temps, de réaliser π_1 et π_2 dans un même espace.

3.5.1. *Un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_2$ sur $\mathfrak{H}_1$.* La preuve de la proposition 3.4.1 nous fournit implicitement l'existence d'un opérateur unitaire F_{12} de $\mathfrak{H}_2$ sur $\mathfrak{H}_1$. Définir explicitement cet opérateur revient à traduire l'équivalence entre les représentations π_{12} et π'_{12} de P_{12}.

Il résulte, tout d'abord, du lemme 2.17 de [DU 1], que les représentations $\chi_1 \otimes S'_{12} T'_{12}$ et $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}} t_{\chi_{12}}$ sont des représentations équivalentes de B'_{12}. Si l'on désigne, ensuite, par $\mathfrak{G}_{12}$ l'espace de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}} t_{\chi_{12}}$, l'opérateur d'entrelacement ϕ_{12} de $\mathfrak{G}_{12}$ sur $\mathfrak{L}'_{12}$ se définit simplement par: $\phi_{12}(f) = f_{|N_{12}}$. En appliquant le procédé d'induction par étages, on en déduit l'opérateur F'_{12} de $\mathfrak{H}'_{12}$ sur $\mathfrak{H}_{12}$ cherché. Cet opérateur satisfait à la propriété suivante:

$$\forall f \in \mathfrak{H}'_{12}, \qquad \forall x \in P_{12}, \qquad F'_{12}(f)(x) = f(x)(1) \tag{16}$$

L'opérateur θ_2 de $\mathfrak{L}_2$ sur $\mathfrak{L}'_{12}$, introduit par (15), induit un opérateur unitaire, noté encore θ_2, défini de $\mathfrak{H}_{12}$ sur $\mathfrak{H}'_{12}$. Enfin, $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ désignent, respectivement, les opérateurs restriction de $\mathfrak{H}_1$ sur $\mathfrak{H}_{12}$, de $\mathfrak{H}_2$ sur $\mathfrak{H}'_{12}$.

Posons: $F_{12} = \mathfrak{R}_2 \circ F'_{12} \circ \mathfrak{R}_1^{-1}$. On définit bien ainsi un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_2$ sur $\mathfrak{H}_1$ qui entrelace les restrictions des représentations à P_{12}. De plus, compte tenu de (15) et (16), F_{12} est caractérisé par:

$$\forall f \in \mathfrak{H}_2, \qquad \forall x \in P_{12}, \qquad F_{12}(f)(x) = f(x)(1). \tag{17}$$

3.5.2. *Un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_1$ sur $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$.* Désignons par $\mathfrak{s}_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{p}_1$, de dimension 4, définie par: $\mathfrak{s}_1 = \langle H_{\eta_1+\eta_2}, X_{\eta_2-\eta_3}, X_{\eta_2+\eta_3}, X_{\eta_2} \rangle$. Il s'agit d'une sous-algèbre supplémentaire de $\mathfrak{b}_1$ dans $\mathfrak{p}_1$. Soit S_1 le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_1$. Il résulte de ce qui précède que l'ensemble $S_1 B_1$ est un ouvert de P_1.

Notations. On adoptera, pour la suite, les notations suivantes:

$$\forall (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*,$$

$$z(a, b, c, t) = h_{\eta_1+\eta_2}(t)\, x_{\eta_2-\eta_3}(a)\, x_{\eta_2+\eta_3}(b)\, x_{\eta_2}(c), \qquad e(t) = \frac{t}{|t|}.$$

Pour $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, posons: $j_1(a, b, c, t) = w_{\eta_1-\eta_3}^{1-e(t)} z(a, b, c, t)$. On vérifie que j_1 est une immersion de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ dans P_1 et que l'ensemble $\Omega_1 = j_1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$. B_1 est un ouvert de P_1 dont le complémentaire dans P_1 est une sous-variété de co-dimension supérieure ou égale à 1.

Pour $f \in \mathfrak{H}_1$, on pose maintenant: $J_1(f) = f \circ j_1$.

LEMME 3.5.1. *L'application J_1 est un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_1$ sur $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$.*

Preuve. Soit $O = \Omega_1 / B_1$; O est un ouvert de P_1/B_1. Si p désigne l'application canonique de P_1 sur P_1/B_1 et $s: O \to P_1$ une application différentiable telle que $p \circ s = Id_O$, alors, selon [Du 3], il existe une forme volume v_s sur O telle que si μ_s désigne la mesure positive définie par v_s, on ait:

$$\forall f \in \mathfrak{C}_1, \qquad \int_{P_1/B_1} f(x)\, dm_1(x) = \int_O f(s(x))\, d\mu_s(x)$$

Dans notre cas, s est définie par: $s(z) = j_1(a, b, c, t)$ pour $z = j_1(a, b, c, t)\, y$, $y \in B_1$. La mesure μ_s n'est autre alors que la mesure image, par l'application $p \circ j_1$, de la mesure invariante sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ notée m.

De ceci, on déduit que pour toute fonction f de $\mathfrak{H}_1$, à support contenu dans Ω_1, on a:

$$\int_{P_1/B_1} |f(x)|^2\, dm_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*} |J_1(f)(a, b, c, t)|^2\, dm(a, b, c, t)$$

Il en résulte que l'appliction J_1 est un morphisme unitaire de $\mathfrak{H}_1$ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$.

Réciproquement, soit f un élément de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ et $x \in B_1$; posons:

$$J'_1(f)(j_1(a, b, c, t)\, x) = \delta_1(x)^{1/2} \cdot t_{\chi_1}(x)^{-1} \cdot f(a, b, c, t) \tag{18}$$

L'ensemble Ω_1 est un ouvert de P_1; il existe donc une fonction C^∞ sur P_1 qui coïncide avec $J'_1(f)$ sur Ω_1 et qui est nulle sur le complémentaire de Ω_1 dans P_1. On définit ainsi une fonction, notée encore $J'_1(f)$, C^∞ sur P_1, à support compact modulo B_1, et on vérifie facilement qu'elle satisfait aux propriétés d'appartenance à $\mathfrak{H}_{1,\infty}$. De plus, on a: $J_1 \circ J'_1(f) = f$, pour tout f de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, et donc, $C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*) \subset \operatorname{Im} J_1$. La densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ implique alors que J_1 est bien une isométrie de $\mathfrak{H}_1$ sur $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ et finit de démontrer le lemme.

3.5.3. *Un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_2$ sur $L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3))$.* Comme précédemment, on définit l'application j_2 de $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans P_2 par: $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $j_2(t) = w_{\eta_1 - \eta_3}^{1 - e(t)} z(0, 0, 0, t)$. L'ensemble $\Omega_2 = j_2(\mathbb{R}^*)$. B_2 est un ouvert de P_2, dont le complémentaire dans P_2 est une sous-variété de codimension $\geqslant 1$.

Pour $f \in \mathfrak{H}_2$, on pose: $G_2(f) = f \circ j_2$. On montre, par des arguments tout à fait analogues à ceux utilisés précédemment, que G_2 est un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_2$ sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^*, \mathfrak{L}_2)$.

La réciproque G'_2 de G_2 est donnée par:

$$\begin{gathered} \forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad \forall x \in B_2, \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^*, \mathfrak{L}_2), \\ G'_2(f)(j_2(t)\, x) = \delta_2(x)^{1/2} \cdot (\chi_2 \otimes S_2 T_2)(x)^{-1} \cdot f(t) \end{gathered} \tag{19}$$

Soit maintenant $\mathfrak{s}_2 = \langle X_{\eta_2 - \eta_3}, X_{\eta_2 + \eta_3}, X_{\eta_2} \rangle$ une sous-algèbre de $\mathfrak{n}_2$, supplémentaire de $\mathfrak{l}$, telle que: $[\mathfrak{s}_2, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$. On en déduit que $N_2 = S_2 \cdot L$, S_2 étant le sous-groupe de N_2, d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_2$. Tout élément n de N_2 s'écrit donc de manière unique: $n = z(a, b, c, 1) \cdot u$, $u \in L$.

Il est facile ensuite de vérifier que l'application r_2, définie par: $r_2(f)(a, b, c) = f(z(a, b, c, 1))$ est un opérateur unitaire de $\mathfrak{L}_2$ sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont la réciproque est donnée par:

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \qquad \forall u \in L, \qquad r_2^{-1}(f)(z(a, b, c, 1)\, u) = t_2(u)^{-1} \cdot f(a, b, c) \tag{20}$$

Posons, enfin, $J_2(f)(t) = r_2(G_2(f)(t))$. On obtient alors le résultat suivant:

LEMME 3.5.2. *L'application J_2 est un opérateur unitaire de $\mathfrak{H}_2$ sur $L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3))$.*

En conséquence, compte tenu des deux lemmes précédents, on peut réaliser, par transport de structure, respectivement π_1 et π_2 dans les espaces $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ et $L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3))$.

LEMME 3.5.3. *Soit* $F: L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3)) \to L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ *l'application canonique définie par*:

$$F(f)(a, b, c, t) = f(t)(a, b, c).$$

Alors, F est un opérateur unitaire qui entrelace les restrictions de π_1 *et* π_2 *à* P_{12}.

Preuve. Il suffit de montrer l'égalité $F = J_1 \circ F_{12} \circ J_2^{-1}$, ce qui s'obtient facilement à l'aide de (17), (19), (20) et des définitions de J_1 et J_2.

La représentation π admet donc une réalisation dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, entièrement déterminée par:

$$\begin{aligned} \forall x \in P_1, \qquad & \pi(x) = J_1 \circ \pi_1(x) \circ J_1^{-1} \\ & \pi(w) = F \circ J_2 \circ \pi_2(w) \circ J_2^{-1} \circ F^{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

3.5.4. *Une formule pour* $\pi(w)$. Il convient, tout d'abord, de déterminer l'opérateur $S_2(w, t(w))$. Pour cela, considérons un élément f de $\mathfrak{L}_2$ et un élément n de N_2. On a:

$$S_2(w, t(w)) \cdot f(n) = \frac{t(w)}{\|A(w)\|} \int_{wLw^{-1}/L \cap wLw^{-1}} f(w^{-1}nwu)\, t_2(wuw^{-1})\, du$$

avec $\|A(w)\| = |\det \operatorname{Ad} w_{p_2/b_2}|^{1/2}$ et du une mesure invariante choisie telle que l'opérateur soit unitaire.

On vérifie facilement que $\|A(w)\| = 1$ et que l'on a les formules de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} e = \pm 1, \qquad & w^e x_{\eta_2 - \eta_3}(a)\, w^{-e} = x_{\eta_1 - \eta_3}(ea) \\ & w^e x_{\eta_2 + \eta_3}(b)\, w^{-e} = x_{\eta_1 + \eta_3}(eb) \\ & w^e x_{\eta_2}(c)\, w^{-e} = x_{\eta_1}(ec) \end{aligned}$$

Soit $(\alpha, \beta, \nu) \in \mathbb{R}^3$ et $\Delta(\alpha, \beta, \nu) = [z(\alpha, \beta, \nu, 1)]$ la classe de $z(\alpha, \beta, \nu, 1)$ dans $wLw^{-1}/L \cap wLw^{-1}$. Il est clair alors, compte tenu de la définition de L et des formules précédentes, que Δ définit un difféomorphisme de variétés de $\mathbb{R}^3$ sur $wLw^{-1}/L \cap wLw^{-1}$. On notera dorénavant $dm(\alpha, \beta, \nu)$ la mesure image par Δ^{-1} de la mesure invariante choisie sur $wLw^{-1}/L \cap wLw^{-1}$. On a alors:

$$S_2(w, t(w)) \cdot f(n)$$
$$= t(w) \int_{\mathbb{R}^3} f(w^{-1} nwz(\alpha, \beta, v, 1))\, t_2(wz(\alpha, \beta, v, 1)\, w^{-1})\, dm(\alpha, \beta, v)$$

On sait, par ailleurs, que w stabilise t_2 et on vérifie immédiatement que $t_2(z(\alpha, \beta, v, 1)) = 1$. D'où:

$$S_2(w, t(w)) \cdot f(n) = t(w) \int_{\mathbb{R}^3} f(w^{-1} nwz(\alpha, \beta, v, 1))\, dm(\alpha, \beta, v)$$

ou encore plus généralement:

$$S_2(w^e, t(w^e)) \cdot f(n) = t(w^e) \int_{\mathbb{R}^3} f(w^{-e} nw^e z(\alpha, \beta, v, 1)\, dm(\alpha, \beta, v)$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$. D'après (21), on a:

$$\begin{aligned} \pi(w) \cdot f(a, b, c, t) &= F \circ J_2 \circ \pi_2(w) \circ J_2^{-1} \circ F^{-1}(f)(a, b, c, t) \\ &= J_2^{-1}[F^{-1}(f)](w^{-1} j_2(t))(z(a, b, c, 1)), \end{aligned}$$

De l'égalité $w^{-1} w_{\eta_1 - \eta_3}^{1 - e(t)} = w_{\eta_1 - \eta_3}^{1 - e(t)} w^{-e(t)}$, on déduit:

$$\begin{aligned} \pi(w) \cdot f(a, b, c, t) &= J_2^{-1}[F^{-1}(f)](j_2(t)\, w^{-e(t)})(z(a, b, c, 1)) \\ &= S_2(w^{e(t)}, t(w^{e(t)})) \cdot r_2^{-1}[F^{-1}(f)](t)(z(a, b, c, 1)) \\ &= t(w^{e(t)}) \int_{\mathbb{R}^3} r_2^{-1}[F^{-1}(f)](w^{-e(t)} z(a, b, c, 1) \\ &\quad \times w^{e(t)} z(\alpha, \beta, v, 1)\, dm(\alpha, \beta, v) \end{aligned}$$

On obtient, enfin, simplement le lemme technique suivant:

LEMME 3.5.4. *Posons*: $l(r, s, h) = x_{\eta_1 - \eta_3}(r)\, x_{\eta_1 + \eta_3}(s)\, x_{\eta_1}(h)$. *On a les formules de commutation suivantes*:

(1) $l(r, s, h)\, x_{\eta_2 - \eta_3}(a) = x_{\eta_2 - \eta_3}(a)\, x_{\eta_1 + \eta_2}(-as)\, l(r, s, h)$

(2) $l(r, s, h)\, x_{\eta_2 + \eta_3}(b) = x_{\eta_2 + \eta_3}(b)\, x_{\eta_1 + \eta_2}(-br)\, l(r, s, h)$

(3) $l(r, s, h)\, x_{\eta_2}(c) = x_{\eta_2}(c)\, x_{\eta_1 + \eta_2}(-2hc)\, l(r, s, h)$.

En remarquant aussi que: $t_2(l(r, s, h) = 1$ et $t_2(x_{\eta_1 + \eta_2}(u)) = e^{-4i\pi u}$, on déduit de tout ceci que:

$$\pi(w) \cdot f(a, b, c, t) = t(w^{e(t)}) \int_{\mathbb{R}^3} e^{4i\pi e(t)(\alpha b + \beta a + 2vc)} f(\alpha, \beta, v, t)\, dm(\alpha, \beta, v)$$

De plus, la mesure $dm(\alpha, \beta, v)$ doit être choisie de façon à rendre l'opérateur précédent unitaire, ce qui implique: $dm(\alpha, \beta, v) = 4\, d\alpha\, d\beta\, dv$. D'où le résultat suivant:

PROPOSITION 3.5.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$. L'opérateur $\pi(w)$ est donné par la formule*:

$$\pi(w) \cdot f(a, b, c, t) = 4e^{-i(\pi/4)\, e(t)} \int_{\mathbb{R}^3} e^{4i\pi e(t)(\alpha b + \beta a + 2vc)} f(\alpha, \beta, v, t)\, d\alpha\, d\beta\, dv$$

3.5.5. *Formules pour un sytème de générateurs de P_1.*

PROPOSITION 3.5.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a les formules suivantes*:

(1) $\pi(x_{\eta_1 - \eta_2}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{4i\pi e(t)\, u(c^2 + ab)} f(a, b, c, t)$
(2) $\pi(x_{\eta_1 + \eta_2}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{-4i\pi e(t)\, u/t^2} f(a, b, c, t)$
(3) $\pi(x_{\eta_1 - \eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{4i\pi bu/|t|} f(a, b, c, t)$
(4) $\pi(x_{\eta_1 + \eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{4i\pi au/|t|} f(a, b, c, t)$
(5) $\pi(x_{\eta_1}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{8i\pi cu/t} f(a, b, c, t)$
(6) $\pi(x_{\eta_2 - \eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a - u/t, b, c, t)$
(7) $\pi(x_{\eta_2 + \eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a, b - u/t, c, t)$
(8) $\pi(x_{\eta_2}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a, b, c - u/|t|, t)$
(9) $\pi(x_{\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a, b - u^2 a - 2ue(t)\, c,\ c + uae(t),\ t)$.
(10) $\pi(x_{-\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a - u^2 b + 2ue(t)\, c,\ b,\ c - ube(t),\ t)$.
(11) $\pi(h_1(e^u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{3u/4} f(ae^{u/2}, be^{u/2}, ce^{u/2}, te^{-u/2})$
(12) $\pi(h_2(e^u)) \cdot f(a, b, c, t) = e^{-3u/4} f(ae^{-u/2}, be^{-u/2}, ce^{-u/2}, te^{-u/2})$
(13) $\pi(h_3(e^u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(ae^u, be^{-u}, c, t)$

La preuve de ce résultat est essentiellement calculatoire. Le principe général de calcul, pour obtenir l'opérateur $\pi(x(u))$, est le suivant. Compte-tenu des définitions, de (18) et de (21), tout revient à étudier la commutation de $x(-u)$ et de $j_1(a, b, c, t)$. Au cas par cas, on montre que: $x(-u) \cdot j_1(a, b, c, t) = j_1(a', b', c', t') \cdot A$, avec $(a', b', c', t') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ et $A \in B_1$. Ceci nous donne:

$$\pi(x(u)) \cdot f(a, b, c, t) = \delta_1(A) \cdot t_{\chi_1}(A)^{-1} f(a', b', c', t')$$

On utilise enfin (13) et la définition de δ_1 pour en déduire les formules souhaitées.

PROPOSITION 3.5.3. *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, $u \in \mathbb{R}$.

(1) *On pose*: $e(u, t, b) = e(u) \cdot i^{(e(1-utb)-1)/2}$. *Alors, on a*:

$$\pi(x_{-\eta_2-\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = \frac{e(u, t, b)}{|1-utb|^{3/4}} \cdot f\left(\frac{a-utab-utc^2}{|1-utb|^{1/2}}, \frac{b}{|1-utb|^{1/2}}, \frac{ce(1-utb)}{|1-utb|^{1/2}}, \frac{te(1-utb)}{|1-utb|^{1/2}}\right)$$

$$\pi(x_{-\eta_2+\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = \frac{e(u, t, a)}{|1-tua|^{3/4}} \cdot f\left(\frac{a}{|1-uta|^{1/2}}, \frac{b-utab-utc^2}{|1-uta|^{1/2}}, \frac{ce(1-uta)}{|1-uta|^{1/2}}, \frac{te(1-uta)}{|1-uta|^{1/2}}\right)$$

(2) *On pose*: $\alpha(u) = [1-uc\,|t|]^2 + u^2t^2ab$, *et* $e(u, a, b, c, t) = (-1)^{(2-e(t)+e(a))(1-e(\alpha(u))/4} \cdot i^{(1-e(\alpha(u)))/2}$. *Alors on a*:

$$\pi(x_{-\eta_2}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = \frac{e(u, a, b, c, t)}{|\alpha(u)|^{3/4}} \cdot f\left(\frac{a}{|\alpha(u)|^{1/2}}, \frac{b}{|\alpha(u)|^{1/2}}, \frac{[c-u\,|t|\,(c^2+ab)]\,e(\alpha(u))}{|\alpha(u)|^{1/2}}, \frac{te(\alpha(u))}{|\alpha(u)|^{1/2}}\right)$$

Les calculs se font comme dans le cas précédent. Tout revient donc à étudier la commutation de $x_{-\alpha}(-u)$ et $j_1(a, b, c, t)$, pour $\alpha = \eta_2 \pm \eta_3$ ou $\alpha = \eta_2$. On a besoin, pour ce faire, du lemme technique suivant, qui résulte de calculs dans $RSL_2(\mathbb{R})$ ou $SL_2(\mathbb{R})$ et dont la démonstration est analogue à celle de la proposition 1, chapitre 3, de [TO].

LEMME 3.5.5. *Soit* a, u *des réels tels que*: $1-au \neq 0$.

(1) *On suppose* α *racine longue. On a*:

$$x_{-\alpha}(-u)\,x_\alpha(a) = x_\alpha\left[\frac{a}{(1-au)}\right] \cdot h_\alpha\left[\frac{1}{(1-au)}\right] \times w_\alpha^{e(u)[1-e(1-au)]} \cdot x_{-\alpha}\left[\frac{-u}{(1-au)}\right]$$

(2) *On suppose* α *racine courte. On a*:

$$x_{-\alpha}(-u)\,x_\alpha(a) = x_\alpha\left[\frac{a}{(1-au)}\right] \cdot h_\alpha\left[\frac{1}{(1-au)}\right] \times \sigma^{e(u)[1-e(1-au)]} \cdot x_{-\alpha}\left[\frac{-u}{(1-au)}\right],$$

(3) *Pour toute racine* α, *on a*: $w_\alpha^{e(u)[1-e(1-au)]} = w_\alpha^{e(1-au)-1} \cdot s^{[(1+e(u))(1-e(1-au))]}$.

A l'aide de ce lemme, on obtient, comme précédemment: $x_{-\alpha}(-u) \cdot j_1(a, b, c, t) = j_1(a', b', c', t') \cdot A$, avec $(a', b', c', t') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ et $A \in B_1$, et on conclut en utilisant (18) et (21).

3.5.6. *Formules pour un système de générateurs de K.* Le groupe K est engendré par w et $K \cap P_1$. La restriction de π à K sera donc entièrement déterminée par la donnée de $\pi(w)$, $\pi(w_{\eta_3}(u))$ et $\pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$. Pour obtenir l'opérateur $\pi(w_{\eta_3}(u))$, il suffit de procéder comme précédemment. Enfin, pour l'opérateur $\pi(w_{\eta_2-\eta_3})(u)$, on utilise la formule: $w_{\eta_2-\eta_3}(u) = x_{\eta_2-\eta_3}(\tan u/2) \cdot x_{\eta_3-\eta_2}(-\sin u) \cdot x_{\eta_2-\eta_3}(\tan u/2)$, et on obtient:

PROPOSITION 3.5.4. *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, $u \in [-\pi, \pi]$.

(1) $\pi(w_{\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = f(a \cos^2 u - b \sin^2 u - ce(t) \sin 2u,$
$b \cos^2 u - a \sin^2 u - ce(t) \sin 2u,\ c \cos 2u + e(t)(a+b) \sin u \cos u,\ t)$

(2) $$\pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u)) \cdot f(a, b, c, t) = \frac{\varepsilon(u, t, a)}{|\cos u + at \sin u|^{3/4}} \cdot$$
$$f\left(\frac{at \cos u - \sin u}{t\,|\cos u + at \sin u|^{1/2}}, \frac{b \cos u + t(c^2+ab) \sin u}{|\cos u + at \sin u|^{1/2}},\right.$$
$$\left.\frac{ce(\cos u + at \sin u)}{|\cos u + at \sin u|^{1/2}}, \frac{te(\cos u + at \sin u)}{|\cos u + at \sin u|^{1/2})}\right)$$

avec $\varepsilon(u, t, a) = e(\sin u) \cdot i^{(1-e(\cos u + at \sin u))/2}$.

3.6. *Vecteurs C^∞ et représentation dérivée*

Nous noterons $E = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ l'espace de π. E_∞ désignera alors l'espace des vecteurs C^∞ de E pour π, et $E_{1,\infty}$ le sous-espace de E, formé des vecteurs C^∞ de E, vis-à-vis de la représentation $\pi_1 = \pi_{|P_1}$. Bien entendu, on a: $E_\infty \subset E_{1,\infty}$. Enfin π_∞ sera la représentation dérivée de $\mathfrak{g}$ dans E_∞.

Soit $\mathfrak{D}_{1,\infty}$ le sous-espace de $\mathfrak{H}_1$ formé des fonctions f, C^∞ sur P_1, à support compact modulo B_1, vérifiant: $\forall x \in P_1$, $\forall b \in B_1$, $f(xb) = \delta_1(b)^{1/2}\, t_{\chi_1}(b)^{-1} \cdot f(x)$. Il est clair que l'opérateur unitaire $J_1 : \mathfrak{H}_1 \to E$ induit une inclusion de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ dans $\mathfrak{D}_{1,\infty}$. Or, d'après [PO], th. 5.1, $\mathfrak{D}_{1,\infty}$ est inclus dans l'espace des vecteurs C^∞ de $\mathfrak{H}_1$; ainsi, on a:

$$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*) \subset E_{1,\infty}$$

L'action d'un élément X de $\mathfrak{p}_1$, comme champ de vecteurs invariant à droite, dans l'espace $\mathfrak{D}_{1,\infty}$ induit un opérateur différentiel régulier sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, noté D_X, vérifiant: $\langle D_X \cdot \varphi, \Psi \rangle = -\langle \varphi, D_X \cdot \Psi \rangle$, $\forall \varphi$, $\Psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, $\langle \ , \ \rangle$ étant le produit scalaire défini sur E.

Soit maintenant $f \in E_{1,\infty}$, $X \in \mathfrak{p}_1$, et $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$. Posons:

$$f(\varphi) = \langle f, \bar{\varphi} \rangle, \qquad D_X \cdot f(\varphi) = -f(D_X \cdot \varphi).$$

f et $D_X \cdot f$ définissent ainsi des distributions sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$ et il résulte de la démonstration du théorème 5.1 de [PO] que $D_X \cdot f$ appartient à E et que l'on a: $\pi_\infty(X) \cdot f = D_X \cdot f$.

Remarquons, ensuite, que si φ est élément de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, alors, par propriété de la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^3$, $\pi(w^{-1})$. φ appartient à $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^*, \mathfrak{s}(\mathbb{R}^3))$, où $\mathfrak{s}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^3$. Si X appartient à $\mathfrak{p}_1$, l'opérateur différentiel D_X est régulier; On peut donc définir l'élément $D_X(\pi(w^{-1}) \cdot \varphi)$ comme élément de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^*, \mathfrak{s}(\mathbb{R}^3))$.

Soit $f \in E_\infty$ et $X \in \mathfrak{p}_1$. On a:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(w) \cdot D_X(\pi(w^{-1}) \cdot f), \varphi \rangle &= \langle D_X(\pi(w^{-1}) \cdot f, \pi(w^{-1}) \cdot \varphi \rangle \\
&= -\langle \pi(w^{-1}) \cdot f, D_X(\pi(w^{-1}) \cdot \varphi) \rangle \\
&= -\langle f, \pi(w) \cdot D_X(\pi(w^{-1}) \cdot \varphi) \rangle \\
&= -\langle f, D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Posons, dans ces conditions:

$$(D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot f)(\varphi) = -f(D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot \varphi).$$

Sachant que $\pi_\infty(\mathrm{Ad}\, wX) \cdot f = \pi(w) \cdot \pi_\infty(X) \cdot \pi(w^{-1}) \cdot f$, on en déduit que: $\pi_\infty(\mathrm{Ad}\, wX) \cdot f = D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot f$. On montre ainsi que $D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot f$ appartient à E et que $\pi_\infty(\mathrm{Ad}\, wX) \cdot f = D_{\mathrm{Ad}\, wX} \cdot f$. D'où:

PROPOSITION 3.6.1. *Soit $f \in E_\infty$, considérée comme distribution sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$. La représentation dérivée π_∞ agit sur f de la manière suivante*:

$$\textit{Soit } X \in \mathfrak{p}_1, \qquad \begin{cases} \pi_\infty(X) \cdot f = D_X \cdot f \\ \pi_\infty(\mathrm{Ad}\, w \cdot X) \cdot f = D_{\mathrm{Ad}\, w \cdot X} \cdot f \end{cases}$$

En utilisant les expressions obtenues dans les propositions 3.5.2 et 3.5.3, on déduit, par des calculs de dérivation simples, les formules suivantes d'opérateurs différentiels associés à la base de Chevalley de $\mathfrak{p}_1$.

PROPOSITION 3.6.2. *Soit $f \in E_\infty$. Dans les coordonnées $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, on a*:

- $\pi_\infty(X_{\eta_1-\eta_2})\cdot f=4i\pi(c^2+ab)\cdot e(t)\cdot f$
- $\pi_\infty(X_{\eta_1+\eta_2})\cdot f=-\dfrac{4i\pi}{t^2}\,e(t)\cdot f$
- $\pi_\infty(X_{\eta_1})\cdot f=\dfrac{8i\pi c}{|t|}\cdot f$
- $\pi_\infty(X_{\eta_1-\eta_3})\cdot f=\dfrac{4i\pi b}{|t|}\cdot f$
- $\pi_\infty(X_{\eta_1+\eta_3})\cdot f=\dfrac{4i\pi a}{|t|}\cdot f$
- $\pi_\infty(X_{\eta_2-\eta_3})\cdot f=-\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial f}{\partial a}$
- $\pi_\infty(X_{\eta_2+\eta_3})\cdot f=-\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial f}{\partial b}$
- $\pi_\infty(X_{\eta_2})\cdot f=-\dfrac{1}{|t|}\dfrac{\partial f}{\partial c}$
- $\pi_\infty(X_{\eta_3})\cdot f=ae(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial c}-2ce(t)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial b}$
- $\pi_\infty(X_{-\eta_3})\cdot f=-be(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial c}+2ce(t)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial a}$
- $\pi_\infty(H_1)\cdot f=\dfrac{3}{4}f+\dfrac{1}{2}\left(a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}+b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+c\,\dfrac{\partial f}{\partial c}-t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$
- $\pi_\infty(H_2)\cdot f=-\dfrac{3}{4}f-\dfrac{1}{2}\left(a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}+b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+c\,\dfrac{\partial f}{\partial c}+t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$
- $\pi_\infty(H_3)\cdot f=a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}-b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}$
- $\pi_\infty(X_{-\eta_2-\eta_3})\cdot f=-c^2t\,\dfrac{\partial f}{\partial a}+\dfrac{bt}{2}\left(\dfrac{3}{2}f-a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}+b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+c\,\dfrac{\partial f}{\partial c}+t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$
- $\pi_\infty(X_{\eta_3-\eta_2})\cdot f=-c^2t\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+\dfrac{at}{2}\left(\dfrac{3}{2}f+a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}-b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+c\,\dfrac{\partial f}{\partial c}+t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$
- $\pi_\infty(X_{-\eta_2})\cdot f=-ab\,|t|\,\dfrac{\partial f}{\partial c}+\dfrac{c\,|t|}{2}\left(\dfrac{3}{2}f+a\,\dfrac{\partial f}{\partial a}+b\,\dfrac{\partial f}{\partial b}+t\,\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$

Il nous reste à déterminer les opérateurs $\pi_\infty(X_\alpha)$, pour $X_\alpha = X_{-\eta_1}$, $X_{-\eta_1 \pm \eta_3}$, $X_{-\eta_1 \pm \eta_2}$. Pour f dans E_∞, on vérifie tout d'abord facilement les formules:

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \pi_\infty(X_{-\eta_1-\eta_3})\cdot f = \pi(w)\cdot\pi_\infty(X_{-\eta_2-\eta_3})\cdot\pi(w^{-1})\cdot f\\
&\bullet\ \pi_\infty(X_{-\eta_1+\eta_3})\cdot f = \pi(w)\cdot\pi_\infty(X_{\eta_3-\eta_2})\cdot\pi(w^{-1})\cdot f\\
&\bullet\ \pi_\infty(X_{-\eta_1})\cdot f = \pi(w)\cdot\pi_\infty(X_{-\eta_2})\cdot\pi(w^{-1})\cdot f\\
&\bullet\ \pi_\infty(X_{\eta_2-\eta_1})\cdot f = -\pi(w)\cdot\pi_\infty(X_{\eta_1-\eta_2})\cdot\pi(w^{-1})\cdot f\\
&\bullet\ \pi_\infty(X_{-\eta_1-\eta_2}) = \tfrac{1}{2}\left[\pi_\infty(X_{-\eta_1})\cdot\pi_\infty(X_{-\eta_2}) - \pi_\infty(X_{-\eta_2})\cdot\pi_\infty(X_{-\eta_1})\right]\cdot f
\end{aligned}
\tag{22}
$$

A l'aide de la proposition 3.5.1, puis avec des calculs simples de dérivations sous le signe intégral, on obtient ensuite:

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \frac{\partial}{\partial a}(\pi(w)\cdot f) = 4i\pi e(t)\,\pi(w)(b\cdot f),\\
&\quad\ \frac{\partial}{\partial b}(\pi(w)\cdot f) = 4i\pi e(t)\,\pi(w)(a\cdot f),\\
&\bullet\ \frac{\partial}{\partial c}(\pi(w)\cdot f) = 8i\pi e(t)\,\pi(w)(c\cdot f),\\
&\quad\ \frac{\partial}{\partial t}(\pi(w)\cdot f) = \pi(w)\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\\
&\bullet\ \frac{\partial^2}{\partial a^2}(\pi(w)\cdot f) = -16\pi^2\pi(w)(b^2\cdot f),\\
&\quad\ \frac{\partial^2}{\partial b^2}(\pi(w)\cdot f) = -16\pi^2\pi(w)(a^2\cdot f),\\
&\bullet\ \frac{\partial^2}{\partial c^2}(\pi(w)\cdot f) = -64\pi^2\pi(w)(c^2\cdot f),\\
&\quad\ \frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}(\pi(w)\cdot f) = -16\pi^2\pi(w)(ab\cdot f),\\
&\bullet\ \frac{\partial^2}{\partial b\,\partial c}(\pi(w)\cdot f) = -32\pi^2\pi(w)(ac\cdot f),\\
&\quad\ \frac{\partial^2}{\partial a\,\partial c}(\pi(w)\cdot f) = -32\pi^2\pi(w)(bc\cdot f)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Pour $\pi(w^{-1})$, Les expressions $(\partial/\partial a)\cdot\pi(w^{-1})$, $(\partial/\partial b)\,\pi(w^{-1})$, $(\partial/\partial c)\,\pi(w^{-1})$ se déduisent des précédentes en multipliant par -1, Les autres expressions restent inchangées.

Pour obtenir les opérateur cherchés, il suffit maintenant d'utiliser la proposition 3.6.1, (22) et (23). Les calculs, longs mais sans difficultés particulières, nous donnent:

PROPOSITION 3.6.3. *Soit $f \in E_\infty$. Dans les coordonnées $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, on a*:

- $$\pi_\infty(X_{-\eta_1-\eta_3})\cdot f = \frac{i\,|t|}{16\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial a} - b\,\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} + 2a\,\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} - 2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + 2c\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial c} - 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial t}\right]$$
- $$\pi_\infty(X_{-\eta_1+\eta_3})\cdot f = \frac{i\,|t|}{16\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial b} - a\,\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} + 2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - 2a\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + 2c\,\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial c} - 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial t}\right]$$
- $$\pi_\infty(X_{-\eta_1})\cdot f = \frac{it}{16\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial c} - 8c\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + 2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial c} + 2a\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial c} - 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial t}\right]$$
- $$\pi_\infty(X_{\eta_2-\eta_1})\cdot f = \frac{ie(t)}{16\pi}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right]$$
- $$\pi_\infty(X_{-\eta_1-\eta_2})\cdot f = \frac{i\,|t|}{16\pi}\left[-\frac{3}{4}f + 2a\,\frac{\partial f}{\partial a} + 2b\,\frac{\partial f}{\partial b} + 2c\,\frac{\partial f}{\partial c} - 3t\,\frac{\partial f}{\partial t} - ab\,\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} + a^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + b^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2ac\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial c} + 2bc\,\frac{\partial^2 f}{\partial b\,\partial c} - 2(2c^2 + ab)\,\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right]$$

3.7. *L'annulateur de π dans $U(\mathfrak{g})$*

L'objet de ce paragraphe est de montrer enfin que la représentation π répond bien au problème posé, c'est-à-dire que son annulateur dans $U(\mathfrak{g})$ est l'idéal de Joseph J_o de $so(4, 3)$. Pour cela, nous utiliserons la technique de construction de cet idéal due à D. Garfinkle, [GA].

Désignons par $\mathfrak{J}_0 = J(O_{\min})$ l'idéal de la variété $O_{\min}$. D'après un théorème de B. Kostant, ([GA], ch. 3, par. 2, th. 1), $\mathfrak{J}_0$ est engendré par $\mathfrak{J}_0 \cap S^2(\mathfrak{g})$. Comme, de plus, $\mathfrak{J}_0 \cap S^2(\mathfrak{g})$ est de dimension finie, il s'en suit que $\mathfrak{J}_0$ est engendré par $[\mathfrak{J}_0 \cap S^2(\mathfrak{g})]^{\mathfrak{n}^-}$. Le travail de D. Garfinkle consiste à déterminer un système approprié de générateurs de $[\mathfrak{J}_0 \cap S^2(\mathfrak{g})]^{\mathfrak{n}^-}$.

Considérons, pour cela, la décomposition de $S^2(\mathfrak{g})$ en sous-$\mathfrak{g}$-modules irréductibles. En utilisant la table 5 de [ON-VI], on obtient:

$$S^2(\mathfrak{g}) = V_{-2\beta} \oplus V_{-2\eta_1} \oplus V_{-(\eta_1+\eta_2+\eta_3)} \oplus V_0,$$

où V_μ est un sous-module irréductible de plus bas poids μ.

Le vecteur de plus bas poids de $V_{-2\eta_1}$ que l'on choisit est donné, d'après [GA], ch. 3, par. 3, def 7, par:

$$v_0 = X_{-\eta_1-\eta_2} \cdot X_{\eta_2-\eta_1} + X_{\eta_3-\eta_1} \cdot X_{-\eta_1-\eta_3} + \tfrac{1}{4} X^2_{-\eta_1}. \tag{24}$$

Ensuite, on détermine un vecteur de plus bas poids de $V_{-(\eta_1+\eta_2+\eta_3)}$ et on obtient:

$$w_0 = X_{-\eta_1-\eta_2} \cdot X_{-\eta_3} - X_{-\eta_2} \cdot X_{-\eta_1-\eta_3} + X_{-\eta_1} \cdot X_{-\eta_2-\eta_3}. \tag{25}$$

On pourra identifier v_0 et w_0 à leurs images dans $U(\mathfrak{g})$.

Soit enfin Ω l'élément de Casimir de $U(\mathfrak{g})$, Δ_c^+ l'ensemble des racines courtes de Δ^+, Δ_l^+ l'ensemble des racines longues, et posons: $c_0 = \Omega + (21/4)$. On a:

$$\begin{aligned} c_0 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 5H_1 - 3H_2 - H_3 + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_l^+} X_\alpha \cdot X_{-\alpha} \\ + \sum_{\alpha \in \Delta_c^+} X_\alpha \cdot X_{-\alpha} + \frac{21}{4} \end{aligned} \tag{26}$$

Le résultat suivant se déduit, alors, de [GA], ch. 4. par. 3, ch. 4. par. 6. th. 1, et ch. 5.th. 2.

Proposition 3.7.1. *L'idéal de Joseph J_0 de $\mathfrak{g}$ est l'idéal de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments v_0, w_0 et c_0 donnés respectivement par* (24), (25) *et* (26).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental qui répond au problème posé dès le début de ce travail. Soit J_π l'annulateur infinitésimal de π. En utilisant les formules données par les propositions 3.6.1. et 3.6.2, on peut exprimer v_0, w_0 et c_0 comme opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, à coefficients localement polynômiaux. Les calculs sont longs, mais sans aucune difficulté théorique. On vérifie, alors, que v_0, w_0, c_0 appartiennent à J_π. A l'aide de la proposition 3.7.1, on montre ainsi que $J_0 \subset J_\pi$. L'égalité $J_0 = J_\pi$ est due finalement au fait que J_0 est un idéal maximal.

THÉORÈME 3.7.1. *L'annulateur de π dans $U(\mathfrak{g})$ est égal à l'idéal de Joseph de $\mathfrak{g}$, et π est une représentation unitaire irréductible de G associée à la G-orbite nilpotente minimale.*

n.b. On parlera encore ici, compte-tenu de la nature de π, de représentation "unipotente", bien que cette appellation n'ait pas tout à fait le même sens que celui de la définition 1.3.2.

4. LES PARAMETRES DE LANGLANDS DE π

La méthode utilisée pour déterminer les paramètres de Langlands de π repose essentiellement sur la classification de D. Vogan des représentations irréductibles admissibles d'un groupe réductif réel ([VO 1]). Cette méthode nécessite la connaissance du caractère infinitésimal de la représentation et d'un K-type minimal.

4.1. *Les K-types de π*

La détermination des K-types est conséquence des deux théorèmes suivants de D. Vogan. Soit G un groupe de Lie semi-simple réel, à centre fini, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, K un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $K_{\mathbb{C}}$ le complexifié de K, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ celle de $\mathfrak{k}$. Soit X un $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$-module, supposé de type fini en tant que $U(\mathfrak{g})$-module, et $v(X)$ la variété associée de X. Soit enfin λ un élément de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^*$ et $K_{\mathbb{C}}(\lambda)$ son stabilisateur dans $K_{\mathbb{C}}$. Dans [VO 2], définition 2.12 et théorème 2.13, D. Vogan associe au couple (λ, X) une "certaine" représentation de dimension finie du groupe $K_{\mathbb{C}}(\lambda)$ que nous noterons $\chi(\lambda, X)$, d'espace $V(\lambda, X)$. Nous nous contenterons de l'existence de cette représentation, sans rentrer dans les détails; les propriétés qui vont suivre préciseront d'ailleurs les choses.

THÉORÈME 4.1.1 [VO 2, th. 4.11]. *Posons $O_\lambda = K_{\mathbb{C}} \cdot \lambda$, $\delta O_\lambda = \bar{O}_\lambda - O_\lambda$, la frontière de O_λ. On suppose que:*

(1) *La forme λ appartient à $v(X)$ et $\overline{O_\lambda}$ contient une composante irréductible de $v(X)$.*

(2) *Si X' est un sous-$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$-module non nul de X, $O_\lambda \subset v(X')$*

(3) *L'espace δO_λ est de co-dimension au moins 2 dans $\overline{O_\lambda}$.*

Alors, il existe un $(S(\mathfrak{g}), K_{\mathbb{C}})$-module Q, de type fini, tel que:

$$v(Q) \subset \delta O_\lambda, \qquad et \qquad X_K \simeq_K \operatorname{Ind}_{K_{\mathbb{C}}(\lambda)}^{K_{\mathbb{C}}} V(\lambda, X) - Q.$$

Conséquence. Si les conditions du théorème précédent sont remplies et si, de plus, $\delta O_\lambda = \{0\}$, on en déduit, alors, que l'ensemble des K-types de X s'identifie à l'ensemble des K-types de $\mathrm{Ind}_{K_{\mathbb{C}}(\lambda)}^{K_{\mathbb{C}}} V(\lambda, X)$, moins un nombre fini d'entre eux.

La détermination des K-types de X se ramène donc, sous réserve de vérification des hypothèses du théorème 4.1.1, à la détermination des K-types de la représentation $\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_{K_{\mathbb{C}}(\lambda)}^{K_{\mathbb{C}}} \chi(\lambda, X)$. Pour cela, D. Vogan utilise une propriété de $K_{\mathbb{C}}$-admissibilité de la représentation $\chi(\lambda, X)$. Introduisons le caractère γ_λ de $K_{\mathbb{C}}(\lambda)$ défini par:

$$\forall z \in K_{\mathbb{C}}(\lambda), \qquad \gamma_\lambda(z) = \det(\mathrm{Ad}\, z)_{(k_{\mathbb{C}}/k_{\mathbb{C}}(\lambda))^*}$$

DÉFINITION 4.1.1. Une représentation algébrique σ de $K_{\mathbb{C}}(\lambda)$ est dite admissible si, pour tout X de $k_{\mathbb{C}}(\lambda)$, $\sigma(\exp X) = \gamma_\lambda(\exp X/2) \cdot Id$.

DÉFINITION 4.1.2. L'orbite O_λ sera dite $K_{\mathbb{C}}$-admissible s'il existe une représentation admissible de $K_{\mathbb{C}}(\lambda)$.

THÉORÈME 4.1.2 [VO 2, th. 8.7]. *Supposons X irréductible, d'annulateur J dans $U(\mathfrak{g})$. Soit O la G-orbite telle que: $\bar{O} = V(grJ)$ et $J(O)$ l'idéal premier de la variété $\bar{O}$. On suppose, de plus, que:*

(1) *Le $S(\mathfrak{g})$-module $M = S(\mathfrak{g})/gr\ J$ vérifie la propriété suivante: il existe un idéal I de $S(\mathfrak{g})$, non contenu dans $J(O)$, tel que: $I \cdot J(O) \subseteq Ann\ M$.*

(2) *L'idéal J est stable par la transformation $u \xrightarrow{t} t_u$.*

Alors, si λ appartient à $O \cap (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$, $\chi(\lambda, X)$ est admissible.

On revient maintenant au cas du revêtement G de $SO_o(4, 3)$ et on reprend les notations du paragraphe 3. Le tore maximal $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ choisi est défini par:

$$\mathfrak{t} = \left\{ W(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \alpha W & 0 & \gamma W & 0 \\ 0 & \beta W & 0 & \beta W \\ \gamma W & 0 & \alpha W & 0 \\ 0 & \beta W & 0 & \beta W \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Rappelons que $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ s'identifie à $sl_2(\mathbb{C}) \times sl_2(\mathbb{C}) \times sl_2(\mathbb{C})$. Dans ces conditions, $\mathfrak{t}$ s'identifie à $so_2(\mathbb{C}) \times so_2(\mathbb{C}) \times so_2(\mathbb{C})$ par:

$$W(\alpha, \beta, \gamma) \to \left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On remarque que: $W_{\eta_1-\eta_2}=W(1,0,0)$, $W_{\eta_1+\eta_2}=W(0,0,1)$, $W_{\eta_3}=W(0,1,0)$, et on choisira comme base de référence de $\mathfrak{t}$ le triplet (T_1, T_2, T_3) défini par:

$$T_1=\frac{i}{2}(W_{\eta_1-\eta_2}+W_{\eta_1+\eta_2}), \qquad T_2=\frac{i}{2}W_{\eta_3}, \qquad T_3=\frac{i}{2}(W_{\eta_1-\eta_2}-W_{\eta_1+\eta_2})$$

La base duale dans $\mathfrak{t}^*$ est notée (e_1, e_2, e_3), $\Delta_c^+=\{e_1+e_2,\ e_1-e_2,\ e_3\}$ est le système de racines compactes positives choisi dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, et $\rho_{\mathbb{C}}$ est la demi-somme des éléments de Δ_c^+.

On pose enfin:

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{t}}^+=\sum_{\alpha\in\Delta_c^+}\mathbb{C}\cdot X_\alpha$$

Le tore $\mathfrak{t}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et détermine ainsi un système de racines $\Delta_{\mathbb{C}}=\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, de type B_3, défini par:

$$\Delta_{\mathbb{C}}=\{\pm(e_i\pm e_j),\ 1\leqslant i<j\leqslant 3,\ \pm(e_i),\ 1\leqslant i\leqslant 3\}$$

L'ensemble $(\Delta_{\mathbb{C}}-\Delta_c)$ est formé, alors, des racines de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$. La représentation de $K_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ s'identifie à la représentation de $SL_2(\mathbb{C})^3$ dans $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^3$ dont le plus haut poids, déterminé par la formule des caractères, est: $\Lambda=e_1+e_3$.

La proposition suivante est conséquence directe d'un résultat de D. Vogan:

Proposition 4.1.1 [VO 3, prop. 2.8].

(1) *L'orbite $O_\Lambda=K_{\mathbb{C}}\cdot X_\Lambda$ est l'unique $K_{\mathbb{C}}$-orbite nilpotente de dimension minimale de $p_{\mathbb{C}}$. De plus, on a*:

$$\dim_{\mathbb{C}} O_\Lambda=\tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} O_{\min}.$$

(2) *Tout cône non nul, fermé, $K_{\mathbb{C}}$-invariant, dans $s_{\mathbb{C}}$, contient O_Λ.*

De ceci, on déduit immédiatement que O_Λ est une $K_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension 4 et on vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme 4.1.1. (1) *On a: $k_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)=\mathfrak{t}_\Lambda\oplus\mathfrak{n}_{\mathfrak{t}}^+$, avec $\mathfrak{t}_\Lambda=\langle T_1-T_3, T_2\rangle$.*

(2) *Posons: $w_{\mathbb{C}}=e^{i\pi/2\, W_{\eta_1-\eta_2}}$ et $\Gamma_{w_{\mathbb{C}}^4}=\{1, w_{\mathbb{C}}^4\}$. Alors, $K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)=\Gamma_{w_{\mathbb{C}}^4}\cdot(K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda))_0$.*

On rappelle enfin que $E=L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*)$ est l'espace de la représentation π et on note E_K son module de Harish–Chandra.

PROPOSITION 4.1.2. *On a* $v(E_K) = O_\Lambda$.

Preuve. Comme $v(E_K)$ est un cône non nul, fermé, $K_{\mathbb{C}}$-invariant, on a, d'après la proposition 4.1.1: $O_\Lambda \subset v(E_K)$. On sait, d'autre part, que l'annulateur de E_K est l'idéal de Joseph J_o de $so(4, 3)$. Alors, si Dim E_K désigne la dimension de Gelfand–Kirillov de E_K et en utilisant un certain nombre de résultats classiques, on obtient:

$$\dim v(E_K) = \operatorname{Dim} E_K = \tfrac{1}{2} \operatorname{Dim}(U(\mathfrak{g})/J_0) = \tfrac{1}{2} \dim V(grJ_O) = \tfrac{1}{2} \dim O_{\min} = 4$$

D'autre part, le corollaire 5.4 de [VO 2] affirme que $v(E_K)$ est réunion finie de $K_{\mathbb{C}}$-orbites nilpotentes. Il suffit alors d'utiliser le fait que O_Λ est l'unique orbite de dimension 4 pour en déduire le résultat annoncé.

COROLLAIRE 4.1.1. *Soit* $\chi(\Lambda, E_K)$ *la représentation de dimension finie de* $K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)$ *associée au couple* (Λ, E_K). *Alors, l'ensemble des K-types de* π *s'identifie à l'ensemble des K-types de la représentation* π_Λ, *moins un nombre fini d'entre eux.*

Preuve. Il suffit de montrer que les hypothèses du théorème 4.1.1 sont satisfaites. Pour (1) et (2), cela découle de la proposition précédente. Pour (3), il suffit de dire que O_Λ est une orbite minimale, et donc que $\delta O_\Lambda = 0$, puis d'utiliser le fait que $\dim O_\Lambda = 4$.

PROPOSITION 4.1.3. *La représentation* $\chi(\Lambda, E_K)$ *est admissible.*

Preuve. Il suffit cette fois de vérifier les hypothèses du théorème 4.1.2, ce qui se fait facilement en constatant que l'idéal en question est l'idéal de Joseph et qu'il possède bien les propriétés voulues.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les K-types de π, et, pour cela, il nous faut déterminer, dans un premier temps, le caractère γ_Λ.

Du lemme 4.2.1, on déduit l'isomorphisme: $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}(X_\Lambda))' \simeq \langle T_1 + T_3 \rangle \oplus \mathfrak{n}_t^+$. D'où:

$$\Lambda^4(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}(X_\Lambda))' = \mathbb{C} \cdot (T_1 + T_3) \wedge X_{e_1+e_2} \wedge X_{e_1-e_2} \wedge X_{e_3}.$$

Il s'en suit que: ($d\gamma_\Lambda$ est la différentielle de γ_Λ)

$$d\gamma_{\Lambda|_{\mathfrak{n}_t^+}} = 0, \qquad d\gamma_{\Lambda|_{\mathfrak{t}_\Lambda}} = 2e_1 + e_3.$$

D'où, en utilisant la proposition 4.1.3:

$$d\chi(\Lambda, E_K)_{|_{\mathfrak{n}_t^+}} = 0, \qquad d\chi(\Lambda, E_K)_{|_{\mathfrak{t}_\Lambda}} = (e_1 + \tfrac{1}{2} e_3) \cdot Id \tag{27}$$

Notons maintenant $\mathscr{K}_\Lambda$ le sous-ensemble de $\mathfrak{t}^*$ formé des plus hauts poids des K-types de π_Λ. Soit $\tau \in \mathscr{K}_\Lambda$, V_τ l'espace du K-type correspondant et ω un vecteur de plus bas poids de V_τ tel que $V_\tau = \mathfrak{n}_{\mathfrak{t}}^+ \cdot \omega$. Le théorème de réciprocité de Frobenius nous permet d'écrire:

$$Hom_{K_{\mathbb{C}}}(V_\tau, \mathrm{Ind}_{K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)}^{K_{\mathbb{C}}} V(\Lambda, E_K)) = Hom_{K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)}(V_\tau, V(\Lambda, E_K))$$

D'après ce qui précède, tout élément Φ de $Hom_{K_{\mathbb{C}}(X_\Lambda)}(V_\tau, V(\Lambda, E_K))$ est entièrement déterminé par la donnée de $\Phi(\omega)$. Donc, $\chi(\Lambda, E_K)$ détermine la restriction du poids de ω à $\mathfrak{t}_\Lambda$. De ceci et de (27), on déduit que:

$$\tau_{|\mathfrak{t}_\Lambda} = -(e_1 + \tfrac{1}{2} e_3).$$

Ainsi: $\forall \tau \in \mathscr{K}_\Lambda$, $\exists \alpha_\tau \in \mathbb{C} / \tau = -(e_1 + \frac{1}{2} e_3) + \alpha_\tau \cdot \Lambda$. Or, τ est un poids dominant et vérifie, de surcroit, la propriété:

$$\forall \alpha \in \Delta_c^+, \qquad \frac{2(\alpha/\tau)}{(\alpha/\alpha)} \in \mathbb{N}.$$

En particulier, $(2(\tau/e_1 - e_2)/(e_1 - e_2/e_1 - e_2)) = \alpha_\tau - 1$. D'où $\alpha_\tau \in \mathbb{N}^*$, et donc: $\tau = (n-1)\, e_1 + (n - \frac{1}{2})\, e_3$, avec n entier $\geqslant 1$. Il suffit enfin d'utiliser le corollaire 4.1.1 pour en déduire le résultat suivant:

PROPOSITION 4.1.4. *Soit* $\mathscr{K}_\Lambda = \{\mu_m = m e_1 + (m + \frac{1}{2})\, e_3,\ m \in \mathbb{N}\}$.

(1) *L'ensemble* $\mathscr{K}_\Lambda$ *s'identifie, via leurs plus hauts poids, à l'ensemble des K-types de* π_Λ.

(2) *L'ensemble,* $\mathscr{K}_\pi$, *des K-types de* π *est inclus dans* $\mathscr{K}_\Lambda$ *et le cardinal de* $(\mathscr{K}_\Lambda - \mathscr{K}_\pi)$ *est fini.*

PROPOSITION 4.1.5. *La K-représentation de plus haut poids* μ_0 *est un K-type de* π.

Preuve. Il s'agit de déterminer un sous-espace K-invariant de dimension 2 de E_K, soit V_0, tel que la représentation $\pi_{|K}$ soit irréductible sur V_0 et de plus haut poids $\mu_0 = \frac{1}{2} e_3$. Le problème consiste donc tout d'abord à rechercher un élément f_0 de E_∞, vérifiant:

$$X_{e_1+e_2} \cdot f_0 = X_{e_1-e_2} \cdot f_0 = X_{e_3} \cdot f_0 = T_1 \cdot f_0 = T_2 \cdot f_0 = 0, \qquad T_3 \cdot f_0 = \tfrac{1}{2} f_0 \quad (28)$$

Pour $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, posons:

$$X = \frac{a+b}{2} = \sqrt{\rho} \cdot \cos u, \qquad Y = \frac{a-b}{2}, \qquad Z = c = \sqrt{\rho} \cdot \sin u$$

La relation: $T_2 \cdot f = 0$, $f \in E_\infty$ devient, en utilisant la proposition 3.6.2:

$$T_2 \cdot f = \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

Toute solution f de (28) est donc de la forme: $f(a, b, c, t) = \varphi(\rho, Y, t)$, où φ est élément de l'espace $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$, muni de la mesure $d\rho \otimes dY \otimes (dt/|t|)$.

Désignons maintenant par τ_0 la représentation irréductible de K, de plus haut poids μ_0, et intéressons-nous à la restriction de τ_0 à $K \cap M_1$. On constate que: $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{d}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$, avec $\mathfrak{d}_1 = \langle W_{\eta_2}, W_{\eta_3}, W_{\eta_2+\eta_3} + W_{\eta_2-\eta_3} \rangle$ et $\mathfrak{s}_1 = \langle W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3} \rangle$.

Par ailleurs, les générateurs respectifs de $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{s}_1$ s'écrivent, dans $su_2 \times su_2 \times su_2$, de la manière suivante:

$$W_{\eta_2} = (j, j, 0), \qquad W_{\eta_3} = (-i, -i, 0),$$

$$(W_{\eta_2+\eta_3} + W_{\eta_2-\eta_3}) = (-k, -k, 0), \qquad (W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) = (0, 0, k).$$

On peut ainsi identifier $\mathfrak{d}_1$ à su_2. Soit, respectivement, D_1 et S_1 les sous-groupes analytiques de G, d'algèbres de Lie $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{s}_1$. On déduit des définitions que τ_0 est triviale sur D_1 et que sa restriction à S_1 est de dimension 2.

D'autre part, sachant que, dans $su_2 \times su_2 \times su_2$, $(W_{\eta_1+\eta_2} - W_{\eta_1-\eta_2}) = (0, 0, i)$, et que, d'après (28), $T_3 \cdot f_0 = (i/2)(W_{\eta_1-\eta_2} - W_{\eta_1+\eta_2}) \cdot f_0 = \frac{1}{2} f_0$, et en s'intéressant à la restriction de τ_0 à S_1, on peut déduire de l'existence de f_0 celle d'un élément f_1 de E_∞ tel que:

$$(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot f_0 = i \cdot f_1, \qquad \text{et} \qquad (W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot f_1 = i \cdot f_0.$$

La fonction f_0 cherchée vérifie donc, en outre, les trois propriétés suivantes:

$$\begin{gathered} W_{\eta_2} \cdot f_0 = 0, \qquad (W_{\eta_2+\eta_3} + W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot f_0 = 0, \\ (W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3})^2 \cdot f_0 = -f_0, \end{gathered} \tag{29}$$

Explicitons maintenant les formules (28) et (29) en termes d'opérateurs différentiels, à l'aide des formules obtenues dans les propositions 3.6.2 et 3.6.3. Pour cela, nous procéderons aux changements de variables successifs suivants:

$$A = \rho - Y^2 + \frac{1}{t^2} = r\cos\theta$$

$$B = \frac{Y}{t} = \frac{r\sin\theta}{2}$$

$$\alpha = \rho - Y^2 - \frac{1}{t^2}$$

La solution f_0 cherchée sera fonction des variables (r, θ, α), définie sur l'ouvert:

$$V = \{(r, \theta, \alpha)/\theta \in]-\pi, \pi], r\cos\theta > \alpha,\ r^2 - \alpha^2 > 0\}$$

Posons: $h_0 = |t|^{3/2} \cdot f_0$. La fonction h_0 devra être, de surcroit, de carré intégrable relativement à la mesure $r\, dr \otimes d\theta \otimes d\alpha$.

Compte tenu de ce qui précède, introduisons, de plus, les opérateurs suivants:

$$\Gamma_1 = 2(X_{e_1-e_2} + X_{e_1+e_2}) = (W_{\eta_1-\eta_3} + W_{\eta_1+\eta_3}) - i(W_{\eta_2-\eta_3} + W_{\eta_2+\eta_3})$$
$$\Gamma_2 = 2(X_{e_1-e_2} - X_{e_1+e_2}) = (W_{\eta_2} + iW_{\eta_1})$$
$$\Gamma_3 = -2X_{e_3} = (W_{\eta_1+\eta_3} - W_{\eta_1-\eta_3}) - i(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3})$$

On obtient:

$$W_{\eta_2} \cdot f_0 = -4Z\,|t|^{-1/2} \frac{\partial h_0}{\partial \alpha}$$

$$(W_{\eta_2+\eta_3} + W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot f_0 = -4X\,|t|^{-1/2} \cdot e(t) \cdot \frac{\partial h_0}{\partial \alpha}$$

$$(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot f_0 = 2 \cdot |t|^{-3/2} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial \theta}$$

$$T_1 \cdot f_0 = \frac{e(t) \cdot |t|^{-3/2}}{8\pi} \left[3\frac{\partial h_0}{\partial \alpha} + 2r\frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha\, \partial r} + \alpha \times \left(\frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha^2} - 16\pi^2 h_o \right) \right]$$

$$T_3 \cdot f_0 = \frac{e(t) \cdot |t|^{-3/2}}{8\pi} \left[r\cos\theta \left(\frac{2}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \theta^2} - 16\pi^2 h_0 \right) - 2\sin\theta \frac{\partial^2 h_0}{\partial r\, \partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial h_0}{\partial \theta} + 2\alpha\cos\theta \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha\, \partial r} - \frac{2\alpha \sin\theta}{r}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha\, \partial \theta} \right]$$

$$\Gamma_1 \cdot f_0 = \frac{iX \cdot |t|^{-5/2}}{2\pi} \left[16\pi^2 h_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \theta^2} + 8\pi t^2 e(t)\frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \right]$$

$$\Gamma_2 \cdot f_0 = \frac{-Ze(t)\cdot|t|^{-5/2}}{2\pi}\left[16\pi^2 h_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha^2}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \theta^2} + 8\pi t^2 e(t)\cdot\frac{\partial h_0}{\partial \alpha}\right]$$
$$\Gamma_3 \cdot f_0 = \frac{i\,|t|^{-3/2}\,e(t)}{4\pi}\left[r\sin\theta\left(16\pi^2 h_0 - \frac{2}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2}\right.\right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \theta^2}\right) - 2\alpha\sin\theta\frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha\,\partial r}$$
$$- \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial h_0}{\partial \theta} - 2\cos\theta\,\frac{\partial^2 h_0}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{2\alpha}{r}\cos\theta$$
$$\left.\times\frac{\partial^2 h_0}{\partial \alpha\,\partial \theta} - 8\pi e(t)\,\frac{\partial h_0}{\partial \theta}\right]$$

Les formules (29) impliquent alors: $\partial h_0/\partial\alpha = 0$ et $\partial^2 h_0/\partial\theta^2 = -(1/4)\cdot h_0$.

On déduit la forme de h_0 suivante:

$$h_0(r, \theta, \alpha) = a(r)\cdot\cos\frac{\theta}{2} + b(r)\sin\frac{\theta}{2}$$

Ensuite, la relation $T_1\cdot f_0 = 0$ implique que: $(1/r)(\partial h_0/\partial r) + (\partial^2 h_0/\partial r^2) + (1/r^2)(\partial^2 h_0/\partial\theta^2) - 16\pi^2 h_0 = 0$. Il s'en suit que a et b sont nécessairement solutions de l'équation différentielle:

$$y'' + \frac{y'}{r} - \left(16\pi^2 + \frac{1}{4r^2}\right)y = 0 \tag{E}$$

dont les solutions générales sont: $y = r^{-1/2}(a_0 e^{4\pi r} + b_0 e^{-4\pi r})$, $a_0, b_0 \in \mathbb{C}$.

En ne conservant que les solutions de carré intégrable, on pose maintenant:

$$h_0^+(r, \theta, \alpha) = r^{-1/2}\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-4\pi r}, \qquad h_0^-(r, \theta, \alpha) = r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-4\pi r},$$
$$f_0^+ = |t|^{-3/2}\cdot h_0^+, \qquad f_0^- = |t|^{-3/2}\cdot h_0^-.$$

Un calcul long, mais sans difficultés théoriques, nous permet alors de vérifier les propriétés suivantes:

- $\Gamma_1\cdot f_0^+ = \Gamma_1\cdot f_0^- = \Gamma_2\cdot f_0^+ = \Gamma_2\cdot f_0^- = 0$,
- $T_3\cdot f_0^+ = \frac{1}{2}e(t)\cdot f_0^+$, $\qquad T_3\cdot f_0^- = -\frac{1}{2}e(t)\cdot f_0^-$,
- $\Gamma_3\cdot f_0^+ = i(1 - e(t))\,f_0^-$, $\qquad \Gamma_3\cdot f_0^- = i(1 + e(t))\cdot f_0^+$.

Soit, pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$f_0^{x,\,y} = x\,\frac{1+e(t)}{2}\cdot f_0^+ + y\,\frac{1-e(t)}{2}\cdot f_0^-,$$

$$f_1^{x,\,y} = x\,\frac{1-e(t)}{2}\cdot f_0^+ + y\,\frac{1+e(t)}{2}\cdot f_0^-$$

et soit W_0 l'espace de dimension 4 engendré par ces fonctions. On vérifie alors que:

$$\Gamma_1\cdot f_0^{x,\,y} = \Gamma_2\cdot f_0^{x,\,y} = \Gamma_3\cdot f_0^{x,\,y} = T_1\cdot f_0^{x,\,y} = T_2\cdot f_0^{x,\,y} = 0,$$

et

$$T_3\cdot f_0^{x,\,y} = \tfrac{1}{2} f_0^{x,\,y},$$

On dispose ainsi, à priori, d'un sous-espace de dimension 2 de fonctions satisfaisant aux conditions souhaitées. Parmi celles-ci, il nous faut déterminer celles qui appartiennent à E_K. Pour cela, on étudie l'action d'un système de générateurs de K sur les fonctions $f_0^{x,\,y}$. Considérons l'opérateur $\pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u))$, pour $u \in [0, \pi]$. A l'aide du (2) de la proposition 3.5.4, on obtient:

$$\text{Si } \cos u + at\sin u > 0, \qquad \pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u))\cdot f_0^{x,\,y} = \cos\frac{u}{2}\, f_0^{x,\,y} + \sin\frac{u}{2}\, f_1^{y,\,-x}$$

$$\text{Si } \cos u + at\sin u < 0, \qquad \pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u))\cdot f_0^{x,\,y} = \cos\frac{u}{2}\, f_0^{-iy,\,ix} + \sin\frac{u}{2}\, f_1^{ix,\,iy}$$

Comme, en particulier, les solutions cherchées sont des vecteurs C^∞, vis-à-vis de la représentation π_1 de P_1, qui est une représentation induite, il s'en suit que ces solutions sont des fonctions C^∞ par rapport aux variables (a, b, c). Par continuité suivant la variable a, on déduit, alors, facilement des formules précédentes l'égalité: $y = ix$. Les seules fonctions de W_0 répondant au problème posé sont donc de la forme $f_0^{x,\,ix}$, $x \in \mathbb{C}$.

Posons: $f_0 = f_0^{1,\,i}$, $f_1 = f_1^{1,\,i}$ et V_0 le sous-espace de W_0 engendré par f_0 et f_1. On vérifie, en utilisant le (1) de la proposition 3.5.4, que: $\pi(w_{\eta_3}(u))\cdot f_k = f_k$, $\forall u \in [-\pi, \pi]$, $k = 0, 1$, et, à l'aide de formules analogues à celles qui précèdent, que: $\pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u))\cdot f_k \in V_0$, $\forall u \in [-\pi, \pi]$, $k = 0, 1$. Posons, enfin: $h_0 = |t|^{3/2}\cdot f_0$, h_0^+ et h_0^- sont définies comme précédemment. On vérifie, tout d'abord, que $(W_{\eta_1+\eta_3} - W_{\eta_1-\eta_3})\cdot h_0^+ = ie(t)\, h_0^-$, $(W_{\eta_1+\eta_3} - W_{\eta_1-\eta_3})\cdot h_0^- = ie(t)\, h_0^+$.

Or, on a:

$$
\begin{aligned}
(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot \pi(w) \cdot h_0^+ &= \pi(w) \cdot (W_{\eta_1-\eta_3} - W_{\eta_1+\eta_3}) \cdot h_0^+ \\
&= -ie(t)\,\pi(w) \cdot h_0^- \\
(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3}) \cdot \pi(w) \cdot h_0^- &= \pi(w) \cdot (W_{\eta_1-\eta_3} - W_{\eta_1+\eta_3}) \cdot h_0^- \\
&= -ie(t)\,\pi(w) \cdot h_0^+
\end{aligned}
$$

Ceci implique que: $(W_{\eta_2+\eta_3} - W_{\eta_2-\eta_3})^2 \cdot \pi(w) \cdot h_0 = -\pi(w) \cdot h_0$. Il est facile de constater, à l'aide de la proposition 3.5.1, que la fonction $\pi(w) \cdot h_0$ ne dépend que des variables (r, θ, t) et on obtient, alors:

$$
\frac{\partial^2 \pi(w) \cdot h_0}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{4}\,\pi(w) \cdot h_0
$$

Comme, d'autre part, on a: $T_1 \cdot \pi(w) \cdot h_0 = \pi(w) \cdot T_1 \cdot h_0 = 0$, il résulte des calculs précédents que la fonction $\pi(w) \cdot f_0$ appartient à l'espace W_0. On montre bien ainsi que f_0 est un vecteur K-fini de E.

De plus, en considérant, pour $u \in [0, \pi]$, la fonction $\pi(w_{\eta_2-\eta_3}(u)) \cdot \pi(w) \cdot f_0$, et à l'aide d'un argument de continuité analogue au précédent, on montre en fait que $\pi(w) \cdot f_0$ appartient à V_0.

Conséquences. (1) La fonction f_0 est K-finie. Il s'agit donc bien d'un vecteur de plus haut poids $\mu_0 = \frac{1}{2} e_3$ dans E, ce qui démontre la proposition.

(2) Le sous-espace de dimension 2, V_0, est l'espace du K-type μ_0.

PROPOSITION 4.1.6. *L'ensemble* $\{\mu_m = me_1 + (m + \frac{1}{2} e_3),\quad m \in \mathbb{N}\}$ *est exactement l'ensemble des K-types de π.*

Preuve. Supposons que μ_m soit un K-type de π, d'espace V_m, et de vecteur de plus haut poids f_m. Soit $\varphi_m : \mathfrak{s} \otimes V_m \to \mathfrak{s} \cdot V_m$ le K-morphisme surjectif canonique de $\mathfrak{s} \otimes V_m$ dans $\mathfrak{s} \cdot V_m$. Pour tout entier i, $X_{e_1+e_3} \otimes f_i$ est un vecteur de plus haut poids de $\mathfrak{s} \otimes V_i$, de sorte que l'on a:

$$
\varphi_i(X_{e_1+e_3} \otimes f_i) \in \bigoplus_{k \leqslant i+1} V_k.
$$

Supposons maintenant $X_{e_1+e_3} \cdot f_m = 0$. On peut alors écrire: $\varphi_m(\mathfrak{s} \otimes V_m) \subset \bigoplus_{k \leqslant m} V_k$.

Considérons, enfin, le K-module $M = \bigoplus_{k \leqslant m} V_k$. A l'aide des deux inclusions établies précédemment, on constate que, pour tout $k \leqslant m$, $\mathfrak{s} \cdot V_k \subset M$, de sorte que l'on peut alors munir M d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module non nul et de dimension finie, ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de π. Ainsi, $X_{e_1+e_3}\cdot f_m$ est non nul, c'est un vecteur de plus haut poids μ_{m+1} dans E.

On déduit donc que si μ_m est un K-type, μ_{m+1} est également un K-type. La proposition résulte alors d'une récurrence simple et des propositions 4.1.4 et 4.1.5.

4.2. *Les paramètres de Langlands de* π

A tout K-type μ de π, D. Vogan associe une sous-algèbre parabolique θ-invariante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, notée $\mathfrak{p}(\mu)$, et définie de la manière suivante. Soit $\Delta^+(\mu)=\{\alpha\in\Delta_{\mathbb{C}},\ (\alpha/\mu+2\rho_c)>0$ ou $(\alpha/\mu+2\rho_c)=0$ et $\alpha<0\}$ un système de racines positives pour lequel $\mu+2\rho_c$ est dominant, $\rho(\mu)$ et $\rho_c(\mu)$ respectivement la demi-somme des racines positives et des racines positives compactes.

PROPOSITION 4.2.1 [VO 1, Prop. 5.3.3]. *Il existe un unique élément* $\tilde{\lambda}(\mu)$ *de* $\mathfrak{t}^*$ *satifaisant aux propriétés suivantes*:

(a) *il existe un ensemble orthogonal* $\{\beta_1, ..., \beta_r\}$ *d'éléments de* $\Delta_{\mathbb{C}}$, *des coefficients* $c_1, ..., c_r$ *définis par*:

$$c_i=-2\,\frac{(\beta_i/\mu+2\rho_c(\mu)-\rho(\mu))}{(\beta_i/\beta_i)},\qquad 0\leqslant c_i\leqslant 1$$

tels que: $\tilde{\lambda}(\mu)=\mu+2\rho_c(\mu)-\rho(\mu)+\frac{1}{2}\sum c_i\beta_i$ *est dominant relativement à* $\Delta^+(\mu)$.

(b) *La racine* β_1 *est non compacte et simple.*

(c) *Soit* $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}(X_{\beta_1})$. *Alors*, $\{\beta_2, ..., \beta_r\}$ *vérifient les mêmes propriétés relativement à* $\mathfrak{g}_1$ *et au* $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_1$-*type* $\mu_{|\beta_1^\perp}$.

(d) *Si* $c_i\neq 0$, $c_j=0$ *alors* $i<j$.

(e) *Soit* $\alpha\in\Delta_{\mathbb{C}}/(\alpha/\tilde{\lambda}_\mu)=0$. *Alors, il existe* i, $1\leqslant i\leqslant r$, *tel que* $(\alpha/\beta_i)\neq 0$.

La sous-algèbre $\mathfrak{p}(\mu)=\mathfrak{t}\oplus\langle X_\alpha,\ \alpha\in\Delta$ et $\langle\alpha,\tilde{\lambda}_\mu\rangle\geqslant 0\rangle$ est la sous-algèbre parabolique θ-invariante associée au K-type μ et $\mathfrak{p}(\mu)=\mathfrak{l}(\mu)\oplus\mathfrak{n}^+(\mu)$ est sa décomposition de Levi.

Cette sous-algèbre sert ensuite à construire un sous-groupe parabolique cuspidal P_μ de G associé à μ. En effet, $\mathfrak{l}(\mu)$ est la complexifiée d'une sous-algèbre réelle $\mathfrak{l}_0(\mu)$ de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a}_0(\mu)$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{l}_0(\mu)\cap\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{l}_0(\mu)^{\mathfrak{a}_0}$ le stabilisateur de $\mathfrak{a}_0(\mu)$ dans $\mathfrak{l}_0(\mu)$. On démontre que $\mathfrak{l}_0(\mu)^{\mathfrak{a}_0}$ est une sous-algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{g}$. Soit Δ_0 un système de racines de $\mathfrak{a}_0(\mu)$ dans $\mathfrak{g}$, Δ_0^+ un système de racines positives, $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0(\mu)) = \mathfrak{m}_0(\mu) \oplus \mathfrak{a}_0(\mu)$ la décomposition de Levi du stabilisateur de $\mathfrak{a}_0(\mu)$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}_0(\mu) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0^+} \mathbb{R} \cdot X_\alpha$.

Alors, $\mathfrak{p}_0(\mu) = \mathfrak{m}_0(\mu) \oplus \mathfrak{a}_0(\mu) \oplus \mathfrak{n}_0(\mu)$ est la sous-algèbre parabolique cuspidale associée au K-type μ et le sous-groupe parabolique correspondant est P_μ, de décomposition de Langlands $P_\mu = M_\mu \cdot A_\mu \cdot N_\mu$.

Soit maintenant $P = MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal de G, δ une représentation dans la série discrète de M, ν un caractère non unitaire de A, $I^P_{\delta,\nu} = \mathrm{Ind}_P^G(\delta \otimes \nu \otimes 1)$, et $A(\delta)$ l'ensemble des K-types minimaux de $I^P_{\delta,\nu}$, dont on sait qu'il est indépendant du paramètre ν. On démontre ([VO 1], th. 6.5.10) que si μ est élément de $A(\delta)$, alors μ est de multiplicité 1 dans $I^P_{\delta,\nu}$, de sorte qu'il existe un et un seul sous-quotient irréductible, $J^P_{\delta,\nu}(\mu)$, de $I^P_{\delta,\nu}$, contenant ce K-type μ.

Le théorème de classification de D. Vogan que nous utiliserons est le suivant:

THÉORÈME 4.2.1 [VO 1, th. 6.5.12]. *Soit $\pi \in \hat{G}$, μ un K-type minimal de π, P_μ le sous-groupe parabolique cuspidal associé à μ. Alors, il existe un élément δ_μ, dans la série discrète de M_μ, un caractère ν de A_μ, tels que: $\mu \in A(\delta_\mu)$ et $\pi \sim J^P_{\delta_\mu,\nu}(\mu)$.*

Venons-en maintenant au cas de notre représentation π. Il résulte de la proposition 4.1.5. que μ_0 est l'unique K-type minimal de π. Le système de racines $\Delta^+(\mu_0)$ est caractérisé par:

$$\Delta^+(\mu_0) = \{e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3, e_3 \pm e_2, e_1, -e_2, e_3\}.$$

Soit $\beta_1 = -e_2$, $\beta_2 = e_1 - e_3$, $\beta_3 = e_1 + e_3$. On vérifie alors que la suite $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de racines fortement orthogonales remplit les conditions a, b, c, d et e de la proposition 4.2.1 et on obtient $\tilde{\lambda}(\mu_0) = 0$. La sous-algèbre parabolique θ-invariante $\mathfrak{p}(\mu_0)$, associée à μ_0, est donc égale à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Ainsi, le sous-groupe parabolique cuspidal associé au K-type minimal μ_0 est le sous-groupe de Borel $B = M.A.N$. Il nous reste maintenant à déterminer les paramètres δ_{μ_0} et ν correspondant à π par le théorème 4.2.1.

- Il est clair que ν est le caractère de A qui sert à définir le caractère infinitésimal de π. D'après [JO 1], on sait, en outre, que la différentielle de ν appartient à la classe, modulo le groupe de Weyl W, de l'élément $\lambda_0 = \frac{3}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 + \eta_3$. On choisit ν de telle façon que $d\nu$ soit dominant relativement à Δ. La seule possibilité est:

$$\nu = e^{(3/2)\,\eta_1 + \eta_2 + (1/2)\,\eta_3}$$

- Déterminons, pour finir, l'ensemble $\hat{M}$. Soit $Q = \langle s^2, w^2 \rangle$ le sous-groupe d'ordre 8 de M engendré par s^2 et w^2, isomorphe au groupe quaternonien. On montre facilement que $M = \Gamma_{\sigma^2} \times Q$, produit direct du groupe quaternonien et d'un sous-groupe central d'ordre 2 de G. Notons χ_1 (respectivement χ_{-1}) le caractère trivial, (respectivement non trivial) de Γ_{σ^2}. Un caractère $q_{\alpha,\beta}$ de $\hat{Q}$ est défini par: $q_{\alpha,\beta}(s^2)=\alpha$, $q_{\alpha,\beta}(w^2)=\beta$. De (10), on déduit que: $\alpha^2=\beta^2=1$. Les caractères de $\hat{Q}$ sont donc au nombre de 4 et donnés par: $\{q_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta\in\{-1,1\}\}$.

Ainsi, $\hat{Q}=\{q_{\alpha,\beta},\ \alpha,\beta\in\{-1,1\},\ \tau_Q\}$, où τ_Q est la représentation irréductible de dimension 2 du groupe quaternonien. D'où:

$$\hat{M}=\{\chi_1\otimes q_{\alpha,\beta},\chi_1\otimes\tau_Q,\chi_{-1}\otimes q_{\alpha,\beta},\chi_{-1}\otimes\tau_Q,\alpha,\beta\in\{-1,1\}\}$$

On sait, de plus, d'après (11), que $\pi(w^4)=-1$, et par définition, que $\pi(\sigma^2)=1$. Comme on a $\pi(w^2)=\delta_{\mu_0}(w^2)\cdot Id$, $\pi(\sigma^2)=\delta_{\mu_0}(\sigma^2)\cdot Id$, le seul choix possible est donc: $\delta_{\mu_0}=\chi_1\otimes\tau_Q$.

D. Vogan établit, enfin, dans [VO 1], th. 6.6.14 et 6.6.15, une correspondance entre sa classification de $\hat{G}$ et celle de Langlands, c'est-à-dire une équivalence entre le quotient $J^{p_\mu}_{\delta_\mu,\nu}(\mu)$ et un quotient de Langlands. En se servant de cette correspondance, on aboutit au résultat suivant:

THEÓRÈME 4.2.2. *Soit $B=MAN$ le sous-groupe de Borel de G, $\nu=e^{(3/2)\eta_1+\eta_2+(1/2)\eta_3}$ un caractère de A, $\delta=\chi_1\otimes\tau_Q$ la représentation irréductible de dimension 2 de $M=\Gamma_{\sigma^2}\times Q$, où χ_1 est le caractère trivial de Γ_{σ^2} et τ_Q la représentation de dimension 2 du groupe quaternonien Q. Alors, π est équivalente au quotient de Langlands de la série principale de paramètres (B,ν,δ).*

5. LA RESTRICTION DE π À G_2

5.1. *Notations et préliminaires*

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède une sous-algèbre déployée $\mathfrak{g}_2$, de type G_2, qui se décrit, avec les notations de [LE-SM], de la manière suivante.

Tout d'abord, $\mathfrak{h}_2=\langle H_1-H_2+2H_3,\ H_2-H_3\rangle$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. On peut choisir une base $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ de racines simples de $\mathfrak{h}_2$ dans $\mathfrak{g}_2$, de sorte que l'opérateur de restriction $j_2\colon\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}_2^*$ soit alors donnée par:

$$j_2(\eta_1-\eta_2)=j_2(\eta_3)=\alpha_1,\qquad j_2(\eta_2-\eta_3)=\alpha_2.$$

Soit $\Delta_2=\{\pm\alpha_1,\pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(2\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(3\alpha_1+\alpha_2),\ \pm(3\alpha_1+2\alpha_2)\}$ un système de racines de $\mathfrak{h}_2$ dans $\mathfrak{g}_2$. La base de Chevalley correspondante de $\mathfrak{g}_2$ se définit en fonction de celle de $\mathfrak{g}$ par les formules suivantes:

$$H_{\alpha_1} = H_1 - H_2 + 2H_3 \qquad H_{\alpha_2} = H_2 - H_3$$

$$X_{\alpha_1} = X_{\eta_1 - \eta_2} + X_{\eta_3} \qquad X_{-\alpha_1} = X_{\eta_2 - \eta_1} + X_{-\eta_3}$$

$$X_{\alpha_2} = X_{\eta_2 - \eta_3} \qquad X_{-\alpha_2} = X_{\eta_3 - \eta_2}$$

$$X_{\alpha_1 + \alpha_2} = X_{\eta_2} - X_{\eta_1 - \eta_3} \qquad X_{-\alpha_1 - \alpha_2} = X_{-\eta_2} - X_{\eta_3 - \eta_1}$$

$$X_{2\alpha_1 + \alpha_2} = -X_{\eta_1} - X_{\eta_2 + \eta_3} \qquad X_{-2\alpha_1 - \alpha_2} = -X_{-\eta_1} - X_{-\eta_2 - \eta_3}$$

$$X_{3\alpha_1 + \alpha_2} = -X_{\eta_1 + \eta_3} \qquad X_{-3\alpha_1 - \alpha_2} = X_{-\eta_1 - \eta_3}$$

$$X_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} = -X_{\eta_1 + \eta_2} \qquad X_{-3\alpha_1 - 2\alpha_2} = X_{-\eta_1 - \eta_2}$$

Dans ces conditions, $\mathfrak{g}_2$ est θ-stable. Soit $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_{G_2} = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}$, et $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{s}_{G_2}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. Soit G_2 le sous-groupe connexe et simplement connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$, $K_2 = K \cap G_2$ le sous-groupe compact maximal de G_2, dont l'algèbre de Lie, $\mathfrak{k}_2$, s'identifie à $su(2) \times su(2)$ selon le plongement suivant:

$$\mathfrak{s}u(2) \times \mathfrak{s}u(2) \to \mathfrak{k}_2$$

$$(i, 0) \to (i, 0, 0)$$

$$(j, 0) \to (j, 0, 0)$$

$$(k, 0) \to (k, 0, 0)$$

$$(0, i) \to (0, i, i)$$

$$(0, j) \to (0, j, j)$$

$$(0, k) \to (0, k, k).$$

Soit, enfin, $w_1 = w_{\alpha_1} = w \cdot \sigma$, $w_2 = w_{\alpha_2}$.

Il existe deux sous-algèbres paraboliques maximales standard de $\mathfrak{g}_2$. que nous désignerons par $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$. Soit Q_1 et Q_2 les sous-groupes paraboliques correspondants.

- La sous algèbre $\mathfrak{q}_1$ admet la décomposition de Langlands suivante: $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_1} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}_1} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_1}$, avec:

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_1} = sl_2(\alpha_2), \qquad \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}_1} = \langle H_2 + H_3 + 2H_1 \rangle,$$

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_1} = \langle X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1 + \alpha_2}, X_{2\alpha_1 + \alpha_2}, X_{3\alpha_1 + \alpha_2}, X_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} \rangle$$

On vérifie, d'autre part, que $Q_1 = \Gamma_{w_1^2}(Q_1)_0$.

- La sous-algèbre $\mathfrak{q}_2$ admet la décomposition de Langlands suivante: $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_2} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}_2} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}$, avec:

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}2} = sl_2(\alpha_1), \qquad \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}1} = \langle H_1 + H_2 \rangle,$$

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}2} = \langle X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{2\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \rangle$$

On vérifie, de plus, que: $Q_2 = \Gamma_{w_2^2} \cdot (Q_2)_0$.

L'algèbre $\mathfrak{g}_2$ contient une et une seule G_2-orbite nilpotente de dimension 8. Le résultat qui suit, dont l'analogue dans le cas complexe est dû à Levasseur–Smith ([LE-SM], prop. 4.2), permet de relier cette G_2-orbite à la G-orbite minimale $O_{\min}$.

Proposition 5.1.1. *Il existe une et seule G_2-orbite ouverte, dense, contenue dans $O_{\min}$, soit $O_8 = G_2 \cdot X_{\eta_3-\eta_1}$, isomorphe à la G_2-orbite nilpotente de dimension* 8.

Preuve. Compte-tenu de ce qui a été fait par Levasseur–Smith, il suffit de démontrer, dans le cas réel, que l'ensemble $G_2 \cdot G(X_{\eta_3-\eta_1})$ contient bien un ouvert de Zariski de G. Le calcul donne:

$$\mathfrak{g}(X_{\eta_3-\eta_1}) = sl_2(\eta_1+\eta_3) \oplus sl_2(\eta_2)$$
$$\oplus \langle X_{-\eta_1-\eta_2}, X_{\eta_2-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_2}, X_{-\eta_1}, X_{\eta_3}, X_{\eta_3+\eta_2} \rangle$$

On peut supposer, pour cette démonstration, que G_2 et G sont linéaires et considérer leurs complexifiés respectifs, $G_{2,\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{C}}$. D'après Levasseur–Smith, $G_{2,\mathbb{C}} \cdot X_{\eta_3-\eta_1}$ est l'unique $G_{2,\mathbb{C}}$-orbite ouverte dense contenue dans $G_{\mathbb{C}} \cdot X_{\eta_3-\eta_1}$. Donc, $G_{2,\mathbb{C}} \cdot G_{\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})$ est un ouvert de Zariski de $G_{\mathbb{C}}$. Tout revient alors à démontrer que: $G \cap (G_{2,\mathbb{C}} \cdot G_{\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})) = G_2 \cdot G(X_{\eta_3-\eta_1})$.

On a: $G \cap (G_{2,\mathbb{C}} \cdot G_{\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})) = \{ y \cdot z,\ y \in G_{2,\mathbb{C}},\ z \in G_{\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1}),\ \overline{y \cdot z} = y \cdot z \}$, $x \to \bar{x}$ étant la conjugaison dans $G_{\mathbb{C}}$, relativement à G.

D'autre part, dire que $\overline{y \cdot z} = y \cdot z$, c'est dire que $t = y^{-1} \cdot \bar{y} = z \cdot \bar{z}^{-1}$ appartient à $G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})$, et $t \cdot \bar{t} = 1$. Supposons vérifiée la propriété (P) suivante:

$$\forall t \in G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1}) / t \cdot \bar{t} = 1, \qquad \exists s \in G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1}) / t = s \cdot \bar{s}^{-1}$$

Soit, alors, $y \cdot z \in G \cap G_{2,\mathbb{C}} \cdot G_{\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})$ et $t = y^{-1} \cdot \bar{y} = z \cdot \bar{z}^{-1}$. Le fait que $t = s \cdot \bar{s}^{-1}$ implique que: $s^{-1} \cdot z \in G(X_{\eta_3-\eta_1})$ et $y \cdot s \in G_2$. D'où: $y \cdot z = y \cdot s \cdot s^{-1} \cdot z \in G_2 \cdot G(X_{\eta_3-\eta_1})$, ce qui démontre le résultat. Il reste donc à montrer que (P) est vraie. Or, $G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1})$ est le groupe connexe défini par:

$$G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3-\eta_1}) = SL_{2,\mathbb{C}}(\eta_1+\eta_3) \cdot U_{2,\mathbb{C}},$$
$$U_{2,\mathbb{C}} = \exp \langle X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-2\alpha_2} \rangle$$

On constate tout d'abord que l'algèbre de Lie de $U_{2,\mathbb{C}}$ est commutative; On peut ainsi identifier $U_{2,\mathbb{C}}$ au groupe additif $\mathbb{C}^3$, avec la conjugaison usuelle. La propriété (P) se vérifie, alors, très simplement pour $U_{2,\mathbb{C}}$.

Etudions maintenant le cas du groupe $SL(2, \mathbb{C})$. Le résultat est, alors, conséquence de la proposition 4.4 de ([LO]), qui établit la propriété suivante:

Soit L un groupe de Lie connexe, σ une involution analytique de L, $L_\sigma = \{x \cdot \sigma(x)^{-1},\ x \in L\}$ et $L_\sigma^1 = \{x \in L / x \cdot \sigma(x) = 1\}$. Alors, L_σ est la composante connexe contenant 1 de L_σ^1.

Ici, σ est la conjugaison sur $SL(2, \mathbb{C})$, $L_\sigma^1 = \{t \in SL(2, \mathbb{C}) / t \cdot \bar{t} = 1\}$, et le calcul donne:

$$L_\sigma^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & ix \\ iy & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C},\ x,\ y \in \mathbb{R},\ |\alpha|^2 + xy = 1 \right\}$$

Il s'en suit que L_σ^1 est homéomorphe à un hyperboloïde à une nappe dans $\mathbb{R}^4$ et, donc, connexe. D'après [LO], on en déduit que la propriété (P) est bien vraie pour $SL(2, \mathbb{C})$.

Pour finir, posons $L = G_{2,\mathbb{C}}(X_{\eta_3 - \eta_1})$ et $U = U_{2,\mathbb{C}}$. En utilisant ce que l'on vient de montrer, on constate que le groupe L/U vérifie (P), ce qui permet de dire, avec les notations précédentes et [LO], que $(L/U)_\sigma^1 = (L/U)_\sigma$ et que $(L/U)_\sigma^1$ est connexe. D'autre part, il est facile d'établir que les espaces symétriques $(L/U)_\sigma$ et L_σ/U_σ sont isomorphes. D'après ce qui précède, on en déduit, alors, que les espaces $(L/U)_\sigma^1$ et L_σ^1/U_σ^1 sont isomorphes ($U_\sigma^1 = U_\sigma$). Mais L_σ^1/U_σ^1 et U_σ^1 sont connexes, ce qui implique que L_σ^1 est connexe, et, d'après [LO], que L vérifie bien la propriété (P), ce qui achève la preuve de la proposition.

On identifiera, dorénavant, la G_2-orbite nilpotente de dimension 8 à l'orbite O_8.

- Par ailleurs, A. Joseph a établi l'existence de deux idéaux primitifs complètement premiers J_1, J_2 de $U(\mathfrak{g}_2)$, et de deux seulement, tels que: $V(J_i) = \bar{O}_8$, $i = 1, 2$. L'un d'entre eux, soit J_1, est de plus égal à $J_0 \cap U(\mathfrak{g}_2)$ ([LE-SM], th. 3.2).

Soit π_{G_2} la restriction de π à G_2. En tenant compte de ce résultat et du théorème 3.7.1, il apparait clairement que l'annulateur de π_{G_2} dans $U(\mathfrak{g}_2)$ est égal à J_1, et pour peu que l'on démontre l'irréductibilité de cette représentation, on aura ainsi construit une représentation unipotente associée à la G_2-orbite O_8.

5.2. *La méthode des orbites pour O_8.*

PROPOSITION 5.2.1. *L'orbite O_8 est G_2-admissible et ne possède qu'un seul paramètre d'admissibilité.*

Preuve. Soit $G_2(X_{\eta_3-\eta_1})$ le stabilisateur dans G_2 de $X_{\eta_3-\eta_1}$. On vérifie que:

$$\mathfrak{g}_2(X_{\eta_3-\eta_1}) = sl_2(3\alpha_1+\alpha_2) \oplus \langle X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-2\alpha_2} \rangle.$$

Ensuite, on constate que $(X_{\alpha_1+\alpha_2}, H_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{-\alpha_1-\alpha_2})$ est un sl_2-triplet θ-stable. On peut, alors, utiliser le lemme 6.10 de [VO 2] pour en déduire que $K_2 \cap G_2(X_{\eta_3-\eta_1})$ est un sous-groupe compact maximal de $G_2(X_{\eta_3-\eta_1})$. Or, les calculs donnent:

$$K \cap G(X_{\eta_3-\eta_1}) = \left\{ \left(\exp t\mathbf{j}, \exp t'\mathbf{j}, \exp \frac{t'-t}{2}\mathbf{j} \right), t, t' \in \mathbb{R} \right\}$$

De ceci on déduit que $K_2 \cap G_2(X_{\eta_3-\eta_1}) = \{(\exp t\mathbf{j}, \exp -t\mathbf{j}, \exp -t\mathbf{j}), t \in \mathbb{R}\}$, et on remarque, alors, que: $K_2 \cap G_2(X_{\eta_3-\eta_1}) \subset (G_2(X_{\eta_3-\eta_1}))_o$, ce qui permet d'affirmer que $G_2(X_{\eta_3-\eta_1})$ est connexe. Soit $R_2(X_{\eta_3-\eta_1})$ un facteur réductif de $G_2(X_{\eta_3-\eta_1})$.

On démontre, enfin, comme dans le lemme 3.2.1, que $R_2(X_{\eta_3-\eta_1})$ s'identifie à la composante neutre de $R_2(X_{\eta_3-\eta_1})^{\mathfrak{g}_2}$ et on déduit ainsi que cette extension métaplectique possède exactement deux composantes connexes, ce qui démontre la proposition.

Notre but consiste maintenant à appliquer la méthode des orbites de M. Duflo à la G_2-orbite O_8 et, en conséquence, de s'intéresser à la restriction aux deux paraboliques Q_i, $i=1, 2$.

- *La restriction à Q_1.* Posons $X_1 = X_{-\eta_1-\eta_2} + X_{-\eta_2-\eta_3} = e^{ad\, X_{\eta_1-\eta_3}} \cdot X_{-\eta_1-\eta_2}$. On constate, d'une part que X_1 est élément de la G-orbite $O_{\min}$, et même plus précisément de la P_1-orbite ouverte dense dans $O_{\min}$, d'autre part que $X_1 = e^{ad(-X_{-\alpha_1-\alpha_2})} \cdot Ad\, w_1 \cdot X_{\eta_3-\eta_1}$ et donc que X_1 appartient à O_8. Soit $f_1 = \mathscr{K}(X_1, \cdot)$ l'élément de $\mathfrak{q}_1^*$ associé à X_1.

PROPOSITION 5.2.2. (1) *La Q_1-orbite $Q_1 \cdot X_1$ est ouverte, dense, contenue dans O_8. C'est de plus l'unique Q_1-orbite possédant ces propriétés.*

(2) *L'application de restriction de $\mathfrak{g}_2$ sur $\mathfrak{q}_1^*$ induit un isomorphisme de $Q_1 \cdot X_1$ sur $Q_1 \cdot f_1$.*

(3) *La forme f_1 est de type unipotent.*

La démonstration de cette proposition repose sur les deux lemmes techniques suivants:

LEMME 5.2.1. *L'ensemble $Q_1 \cdot G_2(X_1)$ est un ouvert de G_2 dont le complémentaire dans G_2 est une sous-variété de co-dimension supérieure ou égale à 1.*

Preuve. On constate tout d'abord que:

$$\mathfrak{g}_2(X_1) = \langle X_{-\alpha_2}, X_{-2\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-2\alpha_2},$$
$$H_{\alpha_2} - X_{-\alpha_1-\alpha_2}, X_{\alpha_2} - X_{-\alpha_1}\rangle$$

Alors, $Q_1 \cdot G_2(X_1)$ est un ouvert de G_2 que l'on va comparer à la grosse cellule de Bruhat Ω_1 de G_2, associée au parabolique Q_1.

Or, $\Omega_1 = Q_1 \cdot \overline{N_{Q_1}}$, $\overline{\mathfrak{n}_{Q_1}} = \langle X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_1-\alpha_2}, X_{-2\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-2\alpha_2}\rangle$, et on peut écrire: $\Omega_1 = \bigcup_{z\in\mathbb{R}} Q_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot \exp zX_{-\alpha_1-\alpha_2} \cdot U_{Q_1}$, avec: $\mathfrak{u}_{Q_1} = \langle X_{-2\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-\alpha_2}, X_{-3\alpha_1-2\alpha_2}\rangle$.

On vérifie, ensuite, que:

$$Ade^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot X_1 = (1-z)\cdot X_{-\eta_1-\eta_2} + X_{-\eta_2-\eta_3}$$

- Supposons $z<1$ et posons: $u = \ln(1-z)$. Le calcul donne alors:

$$Ade^{uH_{\alpha_2}} \cdot Ade^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot X_1 = X_1$$

Ainsi, $e^{uH_{\alpha_2}} \cdot e^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} \in G_2(X_1)$ et on peut écrire: $e^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} = e^{-uH_{\alpha_2}} \cdot x_z$, avec $x_z \in G_2(X_1)$. Or, il est facile de vérifier que: $\exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot e^{-uH_{\alpha_2}} \subset Q_1 \cdot G_2(X_1)$, ce qui donne: $\exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot e^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} \subset Q_1 \cdot G_2(X_1)$, et, donc: $\bigcup_{z<1} Q_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot \exp zX_{-\alpha_1-\alpha_2} \cdot U_{Q_1} \subset Q_1 \cdot G_2(X_1)$.

- Supposons maintenant $z>1$. La formule:

$$Adw_2^2 \cdot Ade^{zX_{-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot X_1 = (z-1)\cdot X_{-\eta_1-\eta_2} + X_{-\eta_2-\eta_3}$$

nous ramène au cas précédent, et, sachant que w_2^2 appartient à Q_1, nous permet d'écrire:

$$\bigcup_{z>1} Q_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot \exp zX_{-\alpha_1-\alpha_2} \cdot U_{Q_1} \subset Q_1 \cdot G_2(X_1)$$

D'où: $\bigcup_{z\in\mathbb{R}-\{1\}} Q_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_{-\alpha_1} \cdot \exp zX_{-\alpha_1-\alpha_2} \cdot U_{Q1} \subset Q_1 \cdot G_2(X_1)$. Il s'en suit que $Q_1 \cdot G_2(X_1)$ contient un ouvert de Ω_1 de codimension supérieure ou égale à 1, ce qui démontre bien le lemme.

LEMME 5.2.2. *On a l'égalité*: $Q_1(X_1) = Q_1(f_1)$.

Preuve. Le calcul donne: $\mathfrak{q}_1(f_1) = \langle X_{-\alpha_2}\rangle$. On constate immédiatement que $\mathfrak{q}_1(X_1) \subset \mathfrak{q}_1(f_1)$, d'où l'égalité pour des raisons de dimension. De même, on peut écrire: $Q_1(X_1) \subset Q_1(f_1)$. La détermination de $Q_1(f_1)$ se ramène à celle d'un facteur réductif, $R(f_1)$. Considérons le stabilisateur

$Q_1(\mathbb{R}f_1)$. Soit $\mathfrak{h}_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{h}_2$ engendrée par l'élément $H_{3\alpha_1+\alpha_2}$. On vérifie l'inclusion:

$$\mathfrak{h}_1 \subset Q_1(\mathbb{R}f_1)$$

Il existe donc un facteur réductif R_1 de $Q_1(\mathbb{R}f_1)$ contenant $R(f_1)$ et un facteur réductif R de Q_1 tels que:

$$\exp \mathfrak{h}_1 \subset R_1 \subset R$$

De [KH-TO], prop. 22, on déduit alors l'existence d'un élément x appartenant au centralisateur de $\exp \mathfrak{h}_1$ dans N_{Q_1} tel que: $xRx^{-1} \subset L_1$ où $L_1 = M_{Q_1}A_{Q_1}$. Le calcul montre que x appartient à $\exp \mathbb{R}X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Ainsi, il existe t_o appartenant à $\mathbb{R}$ tel que: $R(f_1) \subset \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot L_1 \cdot \exp -t_o X_{\alpha_1+\alpha_2}$.

On vérifie, par ailleurs, aisément que $Q_1(\mathbb{R}f_1)$ est inclus dans le normalisateur $\mathfrak{N}_{Q_1}(\mathfrak{q}_1(f_1))$ de $\mathfrak{q}_1(f_1)$ dans Q_1. Montrons que $R(f_1) \subset \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \mathfrak{N}_{L_1}(\mathfrak{q}_1(f_1)) \exp -t_o X_{\alpha_1+\alpha_2}$.

Soit $r = \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot l \cdot \exp -t_o X_{\alpha_1+\alpha_2}$, $l \in L_1$. On a:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad} r \cdot X_{-\alpha_2} &= \operatorname{Ad} \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \operatorname{Ad} l \cdot (X_{-\alpha_2} + Z), \qquad Z \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_1} \\
&= \operatorname{Ad} \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot (\operatorname{Ad} l \cdot X_{-\alpha_2} + Z'), \qquad Z' \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_1}, \\
&\qquad \operatorname{Ad} l \cdot X_{-\alpha_2} \subset l_1 \\
&= \operatorname{Ad} l \cdot X_{-\alpha_2} + Z'', \qquad Z'' \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_1} \\
&= c \cdot X_{-\alpha_2}
\end{aligned}$$

De ceci, on déduit immédiatement que $Z'' = 0$ et $\operatorname{Ad} l \cdot X_{-\alpha_2} = c \cdot X_{-\alpha_2}$, d'où le résultat.

On peut donc écrire un élément r de $R(f_1)$ sous la forme suivante:

$$r = \exp t_o X_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \exp uX_{-\alpha_2} w_1^{2a} \cdot w_2^{2b} \cdot \exp H \cdot \exp -t_o X_{\alpha_1+\alpha_2},$$
$$u \in \mathbb{R}, \qquad a, b \in \mathbb{N}, \qquad H \in \mathfrak{h}_2$$

On constate, d'autre part, que: $f_1(X_{3\alpha_1+2\alpha_2}) = f_1(X_{2\alpha_1+\alpha_2}) = -2$ et $f_1(Z) = 0$, $\forall Z \in \mathfrak{s}_1$ avec $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{m}_{q_1} \oplus \mathfrak{a}_{q_1} \oplus \langle X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+\alpha_2} \rangle$. Le calcul donne ensuite: $\operatorname{Ad} r \cdot X_{3\alpha_1+2\alpha_2} = (-1)^b e^{(3\alpha_1+2\alpha_2)(H)} \cdot X_{3\alpha_1+2\alpha_2} + Z$, avec $Z \in \mathfrak{s}_1$.

De l'égalité $f_1(\operatorname{Ad} r \cdot X_{3\alpha_1+2\alpha_2}) = f_1(X_{3\alpha_1+2\alpha_2})$ on déduit que: $b \equiv 0[2]$, $(3\alpha_1 + 2\alpha_2)(H) = 0$. En utilisant, de la même manière, les égalités:

$$f_1(\operatorname{Ad} r \cdot X_{2\alpha_1+\alpha_2}) = f_1(X_{2\alpha_1+\alpha_2}),$$
$$f_1(\operatorname{Ad} r \cdot X_{\alpha_1+\alpha_2}) = f_1(\operatorname{Ad} rX_{\alpha_1}) = f_1(\operatorname{Ad} r \cdot Z) = 0, \qquad \forall Z \in \mathfrak{h}_2$$

on obtient, successivement:

$$(1-(-1)^a\, e^{(2\alpha_1+\alpha_2)(H)})(3t_o+1)=0$$

$$(-1)^a\, e^{(\alpha_1+\alpha_2)(H)}\cdot(3t_o+2)\cdot ut_o=0$$

$$(3t_o(e^{(1/2)\,\alpha_1(H)}-(-1)^a)+2e^{(1/2)\,\alpha_1(H)})(e^{(1/2)\,\alpha_1(H)}-(-1)^a)\cdot t_o=0$$

$$(-1)^a\,(2ut_o+3ut_o^2)(\alpha_1+\alpha_2)(Z)\,e^{-(1/2)\,\alpha_1(H)}-u\alpha_2(Z)(t_o^2+t_o^3)=0$$

La dernière égalité étant vraie pour tout Z, on en déduit, de plus, que:

$$ut_o^2(1+t_o)=ut_o(3t_o+2)=0$$

Il résulte de tout ceci que: $ut_o=0$

- Si $u\neq 0$, alors, des égalités précédentes on déduit que: $t_0=0$, $a\equiv 0[2]$ et $H=0$. Dans ce cas, on constate que r appartient à $\Gamma_{w_2^4}\cdot\exp\mathbb{R}X_{-\alpha_2}$.
- Si $u=0$, deux cas se présentent:
  - Si $t\neq -\frac{1}{3}$, alors, on a: $a\equiv 0[2]$ et $H=0$, d'où $r\in\Gamma_{w_2^4}$.
  - Si $t=-\frac{1}{3}$, on obtient: $(-1)^a=\pm e^{(1/2)\,\alpha_1(H)}$. Si $(-1)^a=e^{(1/2)\,\alpha_1(H)}$, on est ramené au cas précédent. Supposons, alors, que $(-1)^a+e^{(1/2)\,\alpha_1(H)}=0$. On déduit que: $a\equiv 1[2]$, $H=0$, et $r=\exp -\frac{1}{3}X_{\alpha_1+\alpha_2}\cdot w_1^2\cdot\exp\frac{1}{3}X_{\alpha_1+\alpha_2}$. Le calcul montre, alors, que, pour un tel r, on a: $f_1(\mathrm{Ad}\,r\cdot X_{-\alpha_2})\neq 0$, ce qui rend impossible cette dernière éventualité.

D'où: $Q_1(f_1)=\Gamma_{w_2^4}\cdot(Q_1(f_1))_o$. Il suffit, enfin, de vérifier que l'élément w_2^4 stabilise X_1 pour en déduire le résultat souhaité.

Preuve de la proposition 5.2.2. Le (1) est conséquence directe du lemme 5.2.2, tandis que le (2) est conséquence du lemme 5.2.3. Soit $\mathfrak{b}_{\mathfrak{q}_1}=\langle X_{-\alpha_2},\ X_{\alpha_1},\ X_{2\alpha_1+\alpha_2},\ X_{3\alpha_1+\alpha_2},\ X_{3\alpha_1+2\alpha_2}\rangle$. On vérifie que $\mathfrak{b}_{\mathfrak{q}_1}$ est une polarisation, relativement à f_1, ce qui donne (3).

Conséquence. On peut donc associer à la Q_1-orbite $Q_1\cdot f_1$ une Q_1-représentation unipotente, selon la méthode de Duflo. Soit B_{Q_1} le sous-groupe de Q_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}_{\mathfrak{q}_1}$ et t_{Q_1} le caractère de B_{Q_1} associé à f_1. Alors, $\pi_{Q_1}^U=\mathrm{Ind}_{B_{Q_1}}^{Q_1}t_{Q_1}$ est cette Q_1-représentation unipotente.

PROPOSITION 5.2.3. *La restriction de π_{G_2} à Q_1 est équivalente à la Q_1-représentation unipotente, $\pi_{Q_1}^U$, associée à la Q_1-orbite dense de O_8.*

Preuve. Soit π_{Q_1} la restriction de π à Q_1. On constate que $B_1\cdot Q_1$ est un ouvert de P_1 dont le complémentaire dans P_1 est de co-dimension supérieure ou égale à 1. En effet, le fait que $B_1\cdot Q_1$ soit un ouvert de P_1 est conséquence de l'égalité $\dim(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{b}_1)=\dim\mathfrak{p}_1$, et il résulte de calculs simples que cet ouvert contient la grosse cellule de Bruhat associée au parabolique P_1. On déduit alors de ceci que π_{Q_1} est équivalente à la représentation $\mathrm{Ind}_{B_1\cap Q_1}^{Q_1} t_{\chi_{11}}$, où $t_{\chi_{11}}$ est la restriction à $B_1 \cap Q_1$ du caractère t_{χ_1}.

Par ailleurs, on a: $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1 = \langle H_{\alpha_1} \rangle \oplus \langle X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_1}, X_{3\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \rangle$.

LEMME 5.2.3. *La sous-algèbre $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1$ est une polarisation relativement à f_1, et possède un facteur réductif qui stabilise la restriction de f_1 à ${}^u(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1)$. Elle ne vérifie pas la condition de Pukansky. Cependant, l'ensemble $w(f_1)$ est un ouvert dense de $f_1 + (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1)^\perp$.*

Preuve. Les deux premières assertions s'obtiennent par simple vérification. On constate, ensuite, que tout élément de $f_1 + (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1)^\perp$ s'écrit sous la forme:

$$\phi_{a,b,c,d} = \mathscr{K}(X_1 + aH_{\alpha_2} + bX_{-\alpha_2} + cX_{-\alpha_1-\alpha_2} + dX_{-2\alpha_1-\alpha_2}, \cdot)$$

on vérifie, alors, que si $d \neq \frac{1}{3}$, $\dim \mathfrak{q}_1(\phi_{a,b,c,d}) = 1$ et que $\dim \mathfrak{q}_1(\phi_{0,0,0,1/3}) = 3$. La première propriété implique que $w(f_1)$ est un ouvert de $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1)^\perp$ de codimension supérieure ou égale à 1. Quant à la deuxième propriété, elle montre bien que la condition de Pukansky n'est pas vérifiée.

Remarque. De ce lemme, de la proposition 5.2.2, et du lemme 1.1.1, on déduit, en particulier, que $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{q}_1$ n'est pas de type fortement unipotent.

Ainsi, π_{Q_1} et $\pi_{Q_1}^U$ sont deux représentations unitaires de Q_1, associées à deux polarisations de $\mathfrak{q}_1$ relativement à la forme f_1. Soit V_{Q_1} et $V_{Q_1}^U$ les espaces respectifs de ces représentations. Pour $f \in V_{Q_1}$, on pose:

$$\mathscr{F}_{Q_1}(f)(x) = \int_{B_{Q_1}/B_1 \cap B_{Q_1}} f(xy)\, t_{Q_1}(y)\, dy, \ dy \text{ étant une mesure invariante sur } B_{Q_1}/B_1 \cap B_{Q_1}.$$

- Soit $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$. On pose:

$$j_{\mathfrak{q}_1}(a, b, c, t) = w_{\eta_1+\eta_2}^{1-e(t)} h_{\eta_1+\eta_2}(t)\, x_{\alpha_2}(a)\, x_{\alpha_1+\alpha_2}(c)\, x_{2\alpha_1+\alpha_2}(b)$$

On montre ensuite que $\Omega_{\mathfrak{q}_1} = j_{\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*) \cdot B_1 \cap Q_1$ est un ouvert dense de Q_1 et que l'application $J_{\mathfrak{q}_1}$, définie par: $-f \in V_{Q_1}$, $J_{\mathfrak{q}_1}(f) = f \circ j_{\mathfrak{q}_1}$ est un opérateur unitaire qui permet de réaliser, par transport de structure, π_{Q_1} dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, muni de la mesure invariante sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$.

- Soit $(a, c, u, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}$. On pose:

$$j_{\mathfrak{q}_1}^u(a, c, u, t) = w_{\eta_1+\eta_2}^{1-e(t)} h_{\eta_1+\eta_2}(t)\, w_1^{1-e(u)} h_{\alpha_1}(u)\, x_{\alpha_2}(a)\, x_{\alpha_1+\alpha_2}(c)$$

On vérifie que $\Omega^u_{\mathfrak{q}_1} = j^u_{\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}) \cdot B_{Q_1}$ est un ouvert dense de Q_1 et que l'application $J^u_{\mathfrak{q}_1}$, définie par: $\forall f \in V^U_{Q_1}$, $J^u_{\mathfrak{q}_1}(f) = f \circ j^u_{\mathfrak{q}_1}$ est aussi un opérateur unitaire. La représentation $\pi^U_{Q_1}$ se réalise, alors, par transport de structure, dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2})$, muni de la mesure invariante sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}$.

L'application $\mathscr{F}_{Q_1}$ induit un opérateur, noté de la même manière, de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ sur $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2})$. Comme l'isomorphisme canonique: $\mathfrak{b}_{Q_1}/\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_{Q_1} \simeq \langle X_{2\alpha_1+\alpha_2} \rangle$ induit un isomorphisme de variètés de $B_{Q_1}/B_{Q_1} \cap B_1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit la formule suivante:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*), \qquad \forall (a, c, u, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2},$$

$$\mathscr{F}_{Q_1}(f)(a, c, u, t) = 2i^{(1-e(u))/2} \cdot |u|^{-3/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{a}{u^3}, uz, \frac{c}{u}, t\right) e^{4i\pi z}\, dz$$

Il s'en suit que, par propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{F}_{Q_1}$ est un opérateur unitaire qui entrelace π_{Q_1} et $\pi^U_{Q_1}$, ce qui achève la preuve de la proposition 5.2.3. De celle-ci, on déduit immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 5.2.1. *La représentation π_{G_2} est irréductible; C'est une représentation unipotente de G_2 associée à la G_2-orbite O_8.*

Nous reviendrons ultérieurement sur la réalisation de π_{G_2} dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$.

- *La restriction à Q_2.* Posons: $X_2 = X_{-\eta_1-\eta_2} - X_{\eta_3-\eta_1} = \mathrm{Ad}\, e^{X_{\eta_2+\eta_3}} \cdot X_{-\eta_1-\eta_2}$. Alors, X_2 est élément de $O_{\min}$ et appartient également à la P_2-orbite ouverte dense contenue dans $O_{\min}$. D'autre part, on a: $X_2 = \mathrm{Ad}\, e^{-X_{-2\alpha_1-\alpha_2}} \cdot (-X_{\eta_3-\eta_1})$, si bien que X_2 appartient aussi à O_8. La proposition suivante résulte de calculs tout à fait identiques à ceux de la proposition 5.2.2.

Proposition 5.2.4. *La Q_2-orbite $Q_2 \cdot X_2$ est ouverte, dense, contenue dans O_8. C'est l'unique Q_2-orbite possédant ces propriétés.*

Intéressons-nous maintenant à la sous-algèbre $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{q}_2 = sl_2(\alpha_1) \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}$, et posons:

$$Y_2 = \mathrm{Ad}\, e^{(1/3)\, X_{2\alpha_1+\alpha_2}} \cdot X_2, \qquad f_2 = \mathscr{K}(Y_2, \cdot), \qquad \mu_{\mathfrak{n}_2} = f_{2|_{\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}}}$$

Lemme 5.2.4. *On a: $\mathfrak{q}_2(f_2) = \langle X_{\alpha_1} \rangle$ et $\mathfrak{q}_2(\mu_{\mathfrak{n}_2}) = sl_2(\alpha_1) \oplus \langle X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \rangle$. D'autre part, la sous-algèbre $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{q}_2$ est de type unipotent relativement à f_2, mais f_2 n'est pas de type unipotent.*

Preuve. Les deux premières assertions s'obtiennent sans difficultés. Pour finir, il suffit de constater que $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{q}_2$ est de type unipotent mais n'est pas de type fortement unipotent et d'utiliser le lemme 1.1.1 pour conclure.

La Q_2-orbite $Q_2 \cdot f_2$ n'étant pas de type unipotent, on ne peut pas lui appliquer, à priori, la méthode des orbites de Duflo. Soit, cependant, λ_2 la restriction de f_2 à $sl_2(\alpha_1)$. On vérifie que $\lambda_2(X_{\alpha_1}) = \lambda_2(H_{\alpha_1}) = 0$, $\lambda_2(X_{-\alpha_1}) = -\frac{2}{3}$, et on constate ainsi que λ_2 s'identifie à une sl_2-orbite nilpotente.

D'autre part, la forme $\mu_{\mathfrak{n}_2}$ se prolonge de manière naturelle à un élément, noté μ_2, de $\mathfrak{q}_2^*$, qui s'annule sur $sl_2(\alpha_1)$. Le lemme 5.2.4 permet ensuite de vérifier que $\mathfrak{q}_2(\mu_2) = sl_2(\alpha_1)$, que $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{q}_2$ est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à μ_2 et que μ_2 est de type unipotent.

En conséquence, on constate que, cette fois, la Q_2-orbite dense est entièrement déterminée par le couple (λ_2, μ_2) ou encore, avec les notations et la terminologie de ([DU 1], 1.26), que la forme μ_2 est u-équivalente à f_2 et que $Q_2 \cdot f_2 = O_{\lambda_2, \mu_2}$. Le travail qui suit va consister à étudier de quelle manière on peut relier la restriction de π_{G_2} à Q_2 et le couple (λ_2, μ_2).

De l'égalité $Q_2 \cdot B_2 = P_2$, il résulte immédiatement que:

$$\pi_{G_{2|Q_2}} = \operatorname{Ind}_{B_2 \cap Q_2}^{Q_2} (\chi_2 \otimes S_2 \cdot T_2)_{|B_2 \cap Q_2}.$$

Etudions plus précisement la représentation $(\chi_2 \otimes S_2 \cdot T_2)_{B_2 \cap Q_2}$. Pour définir S_2 et T_2, nous utiliserons la polarisation $\mathfrak{l}_2$ de $\mathfrak{n}_2$ définie par: $\mathfrak{l}_2 = \langle X_{\eta_1}, X_{\eta_1+\eta_3}, X_{\eta_2+\eta_3}, X_{\eta_1+\eta_2} \rangle$. Soit L_2 le sous-groupe de N_2 d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_2$, $T_2 = \operatorname{Ind}_{L_2}^{N_2} t_2$, t_2 caractère de L_2 associé à μ_2 et $\mathscr{L}_2$ l'espace de T_2. Soit $\delta_2 = \mathfrak{l}_2 \cap \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2} = \langle X_{2\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \rangle$. On vérifie que δ_2 est une polarisation de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}$, relativement à $\mu_{\mathfrak{n}_2}$, on note Δ_2 le sous-groupe de $N_{\mathfrak{q}_2}$, d'algèbre de Lie δ_2 et on pose: $T_{\mathfrak{q}_2} = \operatorname{Ind}_{\Delta_2}^{N_{Q_2}} t_{\mathfrak{q}_2}$ la représentation unitaire irréductible de N_{Q_2} associée à $\mu_{\mathfrak{n}_2}$ par la correspondance de Kirillov, d'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{q}_2}$.

Soit $\mathfrak{v}_2 = \langle X_{\eta_1} - 2X_{\eta_2+\eta_3}, X_{\eta_2} + 2X_{\eta_1-\eta_3}, X_{\eta_1+\eta_2} \rangle$. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

LEMME 5.2.5. *L'espace* $\mathfrak{v}_2$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{n}_2$, *isomorphe à l'algèbre de Heisenberg de dimension* 3, *et égale au centralisateur de* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}$ *dans* $\mathfrak{n}_2$. *On a, plus*: $\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{n}_2$. *Enfin, le groupe* $RSL_2(\alpha_1)$ *opère dans* $\mathfrak{v}_2$.

Soit, maintenant, V_2 le sous-groupe de N_2, d'algèbre de Lie $\mathfrak{v}_2$, et $D_2 = \{(x, x^{-1}), x \in \exp \mathbb{R} X_{\eta_1+\eta_2}\}$. l'application $(v, n) \to v \cdot n$ de $V_2 \times N_{Q_2}$ sur N_2 induit un isomorphisme de $V_2 \times N_{Q_2}/D_2$ sur N_2.

Soit $\delta_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}_2 \cap \mathfrak{l}_2 = \langle X_{\eta_1} - 2X_{\eta_2+\eta_3}, X_{\eta_1+\eta_2} \rangle$. On vérifie que $\delta_{\mathfrak{v}}$ est une polarisation de $\mathfrak{v}_2$, relativement à $\mu_{\mathfrak{n}_2}$, on note $\Delta_{\mathfrak{v}}$ le sous-groupe correspondant et on peut définir ainsi la représentation $T_{\mathfrak{v}} = \mathrm{Ind}_{\Delta_{\mathfrak{v}}}^{V_2} t_{\mathfrak{v}}$ de V_2, associée à $\mu_{2|_{\delta\mathfrak{v}}}$ par Kirillov, d'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{v}}$.

L'application $(v, n) \to v \cdot n$ induit aussi un isomorphisme de variétés, soit $(\bar{v}, \bar{n}) \to \overline{vn}$ de $N_{Q_2}/\Delta_2 \times V_2/\Delta_v$ sur N_2/L_2 de telle sorte que, pour un bon choix de mesures, on ait la propriété suivante:

$$\forall f \in \mathfrak{C}_c(N_2/L_2), \qquad \int_{N_2/L_2} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{N_{Q_2/\Delta_2} \times V_2/\Delta_v} f(\overline{yv})\, d\bar{y}\, d\bar{v}.$$

On déduit facilement de tout ceci:

Lemme 5.2.6. *L'application*

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathscr{L}_{\mathfrak{q}_1} \otimes \mathscr{L}_{\mathfrak{v}} &\to \mathscr{L}_2 \\ f \otimes g &\to f \cdot g \end{aligned}$$

est un opérateur unitaire qui entrelace les représentations $T_{\mathfrak{q}_1} \otimes T_{\mathfrak{v}}$ et T_2 de N_2.

Soit $x \in RSL_2(\alpha_1)$. On introduit les représentants de x, (x, t_x), (x, t'_x), (x, t''_x), respectivement dans les extensions métaplectiques $RSL_2(\alpha_1)^{\mathfrak{n}_2}$, $RSL_2(\alpha_1)^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}}$ et $RSL_2(\alpha_1)^{\mathfrak{v}_2}$ et on pose:

$$\chi^v(x, t'_x, t''_x) = \frac{t_x}{t'_x \cdot t''_x} \cdot \chi(x, t_x).$$

Soit enfin $S_{\mathfrak{q}_2}$ et $S_{\mathfrak{v}}$ les représentations métaplectiques des groupes $RSL_2(\alpha_1)^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}}$ et $RSL_2(\alpha_1)^{\mathfrak{v}_2}$, respectivement sur $\mathscr{L}_{\mathfrak{q}_2}$ et $\mathscr{L}_{\mathfrak{v}}$.

Proposition 5.2.5. (1) *Soit $\tau_{\mathfrak{v}} = \chi^{\mathfrak{v}} \otimes S_{\mathfrak{v}}$ définie par: $\forall x \in RSL_2(\alpha_1)$, $\forall (x, t'_x) \in (RSL_2(\alpha_1))^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}}$, $\forall (x, t''_x) \in (RSL_2(\alpha_1))^{\mathfrak{v}_2}$,*

$$\tau_{\mathfrak{v}}(x, t'_x) = \chi^{\mathfrak{v}}(x, t'_x, t''_x) \cdot S_{\mathfrak{v}}(x, t''_x)$$

Cette formule ne dépend pas du choix du représentant de x dans $(RSL_2(\alpha_1))^{\mathfrak{v}_2}$ et définit une représentation de $(RSL_2(\alpha_1))^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}_2}}$ dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{v}}$.

(2) *On a: $(\chi_2 \otimes S_2 \cdot T_2)_{|B_2 \cap Q_2} = \tau_{\mathfrak{v}} \otimes S_{\mathfrak{q}_2} \cdot T_{\mathfrak{q}_2}$, et la restriction de π_{G_2} à Q_2 est équivalente à $\mathrm{Ind}_{B_2 \cap Q_2}^{Q_2}(\tau_{\mathfrak{v}} \otimes S_{\mathfrak{q}_2} \cdot T_{\mathfrak{q}_2})$.*

La preuve de ce résultat s'obtient par simple vérification.

On utilise le modèle de Schrödinger pour la représentation métaplectique $S_{\mathfrak{v}}$ et on réalise ainsi celle-ci dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après Kashiwara–Vergne ([KA-VE]), $S_{\mathfrak{v}}$ est somme directe de deux représentations irréductibles que nous noterons $S_{\mathfrak{v}}^+$ et $S_{\mathfrak{v}}^-$, opérant respectivement dans l'espace des fonctions paires et impaires de $L^2(\mathbb{R})$.

Posons: $\tau_{\mathfrak{v}}^{+}=\chi^{\mathfrak{v}}\otimes S_{\mathfrak{v}}^{+}$ et $\tau_{\mathfrak{v}}^{-}=\chi^{\mathfrak{v}}\otimes S_{\mathfrak{v}}^{-}$.

PROPOSITION 5.2.6. *La restriction π_{Q_2} de π_{G_2} au parabolique Q_2 n'est pas irréductible. Elle possède deux composantes irréductibles*:

$$\pi_{Q_2}^{+}=\mathrm{Ind}_{B_2\cap Q_2}^{Q_2}\tau_{\mathfrak{v}}^{+}\otimes S_{\mathfrak{q}_2}\cdot T_{\mathfrak{q}_2}\qquad et\qquad \pi_{Q_2}^{-}=\mathrm{Ind}_{B_2\cap Q_2}^{Q_2}\tau_{\mathfrak{v}}^{-}\otimes S_{\mathfrak{q}_2}\cdot T_{\mathfrak{q}_2}.$$

Preuve. La Q_2-orbite $Q_2\cdot\mu_2$ est la Q_2-orbite dense associée à la G_2-orbite minimale. En utilisant la preuve de la proposition 2.2.1, on constate que: $Q_2(\mu_2)=Q_2\cap G_2(X_{-3\alpha_1-2\alpha_2})$ et on vérifie facilement que: $Q_2(\mu_2)\subset B_2\cap Q_2$. Il résulte de ceci que les deux représentations $\pi_{Q_2}^{+}$ et $\pi_{Q_2}^{-}$ sont des représentations de type "Duflo", et, donc, irréductibles.

Nous allons montrer, pour finir ce paragraphe, pourquoi ce dernier résultat reste en accord avec la philosophie générale de la méthode des orbites, c'est-à-dire pourquoi on associe, dans cette situation, deux représentations unitaires irréductibles de Q_2 à la Q_2-orbite dense.

LEMME 5.2.7. (1) *Le stabilisateur $Q_2(Y_2)$ est un sous-groupe ouvert d'indice 2 de $Q_2(f_2)$, de sorte que la Q_2-orbite $Q_2\cdot Y_2$ est un revêtement d'ordre 2 de $Q_2\cdot f_2$*

(2) *Soit τ_2 la restriction à $Q_2(Y_2)^{\mathfrak{q}_2}$ du paramètre d'admissibilité χ_{G_2} de O_8 et σ_2 la représentation de $Q_2(f_2)^{\mathfrak{q}_2}$ induite par τ_2. Alors, σ_2 est somme de deux caractères ρ^{+}, ρ^{-}, et définit ainsi deux paramètres d'admissibilité pour la Q_2-orbite $Q_2\cdot f_2$.*

Preuve. D'après le lemme 5.2.4, $\mathfrak{q}_2(f_2)$ est de dimension 1 et contient $\mathfrak{q}_2(Y_2)$, d'où l'égalité: $\mathfrak{q}_2(f_2)=\mathfrak{q}_2(Y_2)$. L'inclusion $Q_2(Y_2)\subset Q_2(f_2)$ est claire. De plus, f_2 est définie par:

$$f_2(X_{3\alpha_1+2\alpha_2})=2,\qquad f_2(X_{-\alpha_1})=\tfrac{2}{3},\qquad f_2(Z)=0,$$
$$\forall Z\in h_2\oplus\langle X_{\alpha_2},X_{\alpha_1+\alpha_2},X_{2\alpha_1+\alpha_2},X_{3\alpha_1+\alpha_2},X_{\alpha_1}\rangle$$

Des inclusions $Q_2(f_2)\subset Q_2(\mu_{\mathfrak{n}_2})$, $Q_2(\mathbb{R}f_2)\subset Q_2(\mathbb{R}\mu_{\mathfrak{n}_2})$, on déduit l'existence d'un facteur réductif $R(f_2)$ de $Q_2(f_2)$, d'un facteur réductif R_2 de $Q_2(\mathbb{R}\mu_{\mathfrak{n}_2})$ et d'un facteur réductif R de Q_2 tels que:

$$R(f_2)\subset R_2\subset R$$

De plus, on constate aisément que $Q_2(\mathbb{R}\mu_{\mathfrak{n}_2})$ contient le sous-groupe de cartan H_2 de G_2 de sorte qu'en appliquant à nouveau [KH-TO], prop. 22, on en déduit que $R=M_{Q_2}\cdot A_{Q_2}$, et $R(f_2)\subset M_{Q_2}\cdot A_{Q_2}$.

Le calcul donne alors: $R(f_2) = \Gamma_{w_1^2}$ et, donc:

$$Q_2(f_2) = \Gamma_{w_1^2} \cdot (Q_2(f_2))_o \tag{30}$$

On vérifie ensuite que seul l'élément w_1^4 du groupe $\Gamma_{w_1^2}$, autre que 1, stabilise Y_2, ce qui donne:

$$Q_2(Y_2) = \Gamma_{w_1^4} \cdot (Q_2(f_2))_o \tag{31}$$

La première partie du lemme se déduit immédiatement de (30) et (31).

En fait, σ_2 est entièrement déterminé par sa restriction au facteur réductif $R(f_2)^{\mathfrak{q}_2}$. Compte-tenu de la définition de τ_2, de (30) et (31), on définit les deux caractères ρ^+, ρ^- de $\Gamma_{w_1^2}$ par:

$$\rho^+(w_1^2) = 1, \qquad \rho^-(w_1^2) = -1$$

Soit $\beta_2 = \langle X_{-\alpha_1}, X_{2\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+\alpha_2}, X_{3\alpha_1+2\alpha_2} \rangle$. On vérifie que β_2 est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_2(f_2)$ et que $w_1^2 \cdot \beta_2 = \beta_2$. Il est facile de voir, ensuite, que: $R(f_2)^{\mathfrak{q}_2} = \Gamma_{w_1^2} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les caractères ρ^+ et ρ^- se prolongent alors en deux caractères de $(Q_2(f_2))^{\mathfrak{q}_2}$, notés de la même manière, et vérifiant la propriété: $\rho^{\pm}(\varepsilon) = -1$. On obtient, ainsi, deux paramètres d'admissibilité associés à la Q_2-orbite $Q_2 \cdot f_2$, et σ_2 n'est autre qu'une représentation du groupe des composantes connexes de $Q_2(f_2)^{\mathfrak{q}_2}$, telle que: $\sigma_2 = \rho^+ \oplus \rho^-$.

On peut maintenant décider de relier les deux composantes irréductibles de π_{Q_2} aux deux paramètres ρ^+ et ρ^- de la manière suivante:

Assertion. La représentation $\pi_{Q_2}^+$ (respectivement $\pi_{Q_2}^-$) est une Q_2-représentation unitaire irréductible associée au couple (f_2, ρ^+) (respectivement (f_2, ρ^-)).

Ainsi, même dans la situation particulière du parabolique Q_2, la philosophie de la méthode des orbites fournit encore un modèle cohérent.

5.3. *Une représentation unipotente de G_2 associée à O_8*

On a établi, dans le paragraphe précédent, l'irréductibilité de la représentation π_{G_2} et on obtient bien ainsi une représentation unipotente associée à l'orbite O_8. Comme dans le cas de la représentation π, on peut réaliser π_{G_2} dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$ et donner des formules pour un système de générateurs de G_2. On constate, pour cela, que G_2 est engendré par Q_1 et l'élément w_1 de Q_2. Alors, π_{G_2} est entièrement déterminée par les formules suivantes: soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*)$, soit $u \in \mathbb{R}$, soit $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$.

$$\pi_{G_2}(x_{\alpha_2}(u))\cdot f(a,b,c,t)=f\left(a-\frac{u}{t},b,c,t\right)$$

$$\pi_{G_2}(x_{-\alpha_2}(u))\cdot f(a,b,c,t)=\frac{e(u,t,a)}{|1-uta|^{3/4}}\cdot f\left(\frac{a}{|1-uta|^{1/2}},\frac{b-utab-utc^2}{|1-uta|^{1/2}},\right.$$

$$\left.\frac{ce(1-uta)}{|1-uta|^{1/2}},\frac{te(1-uta)}{|1-uta|^{1/2}}\right)$$

$$\pi_{G_2}(x_{\alpha_1}(u))\cdot f(a,b,c,t)=e^{4i\pi e(t)\,u(c^2+ab)}$$

$$\times f(a,b-u^2a-2ue(t)\,c,c+uae(t),t)$$

$$\pi_{G_2}(w_1)\cdot f(a,b,c,t)=4\cdot e^{-i(\pi/4)\,e(t)}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}e^{-4i\pi e(t)(\alpha a+\beta b+2\gamma c)}$$

$$\times f(\alpha,\beta,\gamma,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

Bibliographie

[BOU] N. Bourbaki, "Intégration," Chap. 7, Hermann, Paris.

[DU 1] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, *Acta Math.* **149** (1982), 154–212.

[DU 2] M. Duflo, "Représentations des groupes de Lie résolubles," Monographies de la S.M.F., Dunod, Paris.

[GA] D. Garfinkle, "A new construction of the Joseph ideal," PD. thesis, MIT Cambridge, 1982.

[JO 1] A. Joseph, On the variety of a primitive ideal, *J. Algebra* **102** (1986), 39–59.

[JO 2] A. Joseph, The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal, *Ann. Sci. E.N.S., 4e sér.* **9** (1976), 1–29.

[KA-VE] M. Kashiwara et M. Vergne, On the Segal–Shale Weil representations and harmonic polynomials, *Invent. Math.* **44** (1978), 1–47.

[KH-TO] M. S. Khalgui et P. Torasso, Formule de Poisson–Plancherel pour un groupe presque algébrique de type I: transformée de Fourier d'intégrales orbitales, *J. Funct. Anal.* **116**, n° 2 (1993), 359–440.

[LE-SM] T. Levasseur et S. P. Smith, Primitive ideals and nilpotent orbits in type G_2, *J. Algebra* **114** (1988), 81–105.

[LI-PE] G. Lion et P. Perrin, Extensions de représentations de groupes unipotents *p*-adiques - Calculs d'obstructions, *in* "Proc. conférence de Marseille, 1980," pp. 327–356.

[LI-VE] G. Lion et M. Vergne, "The Weil Representation, Maslov Index, and Theta Series," Birkhäuser, Boston, 1980.

[LO] O. Loos, "Symmetric Spaces," Tome 1, Benjamin, New York/Amsterdam, 1969.

[ON-VI] A. L. Onishchik et E. B. Vinberg, "Lie Groups and Algebraic Groups," Springer-Verlag, New York/Berlin.

[PO] N. S. Poulsen, On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.

[SE] J. P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2. *Astérisque* **46**.

[TO] P. TORASSO, Quantification géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de $SL_3(\mathbb{R})$, *Acta Math.* **150** (1983), 153–242.

[VO 1] D. VOGAN, "Representation of Real Reductive Lie Groups," Birkhäuser, Boston, 1981.

[VO 2] D. VOGAN, Associated varieties and unipotent representations, *in* "Harmonic Analysis on Reductive Groups," Birkhäuser, Boston, 1991.

[VO 3] D. VOGAN, "Singular Unitary Representation," Lectures Notes in Math., Marseille-Luminy," pp. 506–535, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1980.

[VO 4] D. VOGAN, The unitary dual of G_2, *Invent. Math.* **116**, Fasc. 1–3 (1994), 677–791.

[WA] G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups," Vol. 1, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1972.